Esecitazione AM3 n.1-A.A. 2008-2009- 02/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema delle contrazioni

1. Dato il funzionale su $C([0,1],\mathbb{R})$:

$$u(x) \to \varphi(u)(x) = 1 + \int_0^1 e^{-x\,y} y\,u(y) \mathrm{d}\,y$$

determinare se e quali punti fissi ammette.

2. Sia φ il seguente funzionale su $C([0,1],\mathbb{R})$

$$u(x) \to \varphi(u)(x) = 1 + \int_0^1 u(t) \mathrm{d}\,t.$$

Provare che φ é una contrazione su $C([0,1],\mathbb{R})$ e determinare il punto fisso di φ.

3. Sia B_a la palla chiusa di raggio $a > 0$ in l^2:

$$B_a := \{\, x \in l^2 \;:\; \|\, x \,\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \le a^2 \,\}.$$

Dati $b, c > 0$ e $y \in B_b$, consideriamo il seguente funzionale su B_a:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_a \to \varphi(x) = (c\sqrt{|x_n\,y_n|})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Allora:

- verificare che φ é a valori in l^2;
- determinare per quali valori di c lo spazio darrivo é B_a;
- determinare quanti e quali punti fissi ammette il funzionale φ;
- determinare per quali valori di c il funzionale φ é una contrazione.

Soluzioni

1. Date $u, v \in C([0,1],\mathbb{R})$, si ha che

$$\begin{aligned}|\varphi(u)(x) - \varphi(v)(x)| &\leq \int_0^1 e^{-x\,y} y|u(y) - v(y)|\mathrm{d}\,y \\ &\leq \|u - v\|_\infty \int_0^1 y\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\|u - v\|_\infty.\end{aligned}$$

   Quindi φ è una mappa da $C([0,1],\mathbb{R})$ in se che è una contrazione. Ammette quindi un unico punto fisso.

2. Date $u, v \in C([0,1],\mathbb{R})$, si ha che

$$\begin{aligned}|\varphi(u)(x) - \varphi(v)(x)| &\leq \frac{1}{2}\int_0^x |u - v|(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\|u - v|_\infty.\end{aligned}$$

   Quindi è una contrazione su $C([0,1],\mathbb{R})$. Lunico punto fisso u di φ: $\varphi(u) = u$, soddisfa

$$u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x u(t)\mathrm{d}\,t.$$

   Equivalentemente, dal Teorema fondamentale del calcolo $u \in C^1((0,1),\mathbb{R})$ e, per derivazione, vale

$$u'(x) = \frac{1}{2}u(x) \quad \text{in} \quad (0,1), u(0) = 1.$$

   Quindi $u(x) = e^{\frac{x}{2}}$ è lunico punto fisso di φ.

3. Dato $x \in B_a$, dalla disuguaglianza di Minkowski segue che

$$\|\varphi(x)\|_2^2 = c_2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n||y_n| \leq c_2\|x\|_2\|y\|_2 \leq a\,b\,c_2,$$

   poiché $y \in B_b$. Quindi φ prende valori in l_2 e, se $c \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$, prende valori in B_a. Un punto fisso $x \in B_a$ deve soddisfare per ogni $n \in \mathbb{N}$: $c\sqrt{|x_n\,y_n|} = x_n$. Quindi $x_n = 0$ oppure $x_n = c_2|y_n|$. Dato $J \subset \mathbb{N}$, l'elemento

$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in J \\ c_2|y_n| & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus J \end{cases} \tag{1}$$

   è quindi un punto fisso di φ. Al variare di $J \subset \mathbb{N}$, se $y \neq 0$, la mappa φ ammette almeno due punti fissi. Quindi, per ogni $c < \sqrt{\frac{a}{b}}$ la mappa φ non puó essere una contrazione da B_a in se.