I Esonero di AM3 - 17/4/2009

1) [10 punti] Siano x_n e y_n, $n \geq 1$, definite nel modo seguente:

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{k+1}}\right) \left(\frac{\sin(kn)}{k+1} + 2\right) , \qquad y_n^{(k)} = \frac{2}{n(k+1)} \text{ per } k = 0, 1, \ldots .$$

(a) Discutere se x_n appartiene a l^1 e/o l^2.

(b) Discutere la convergenza della successione x_n in l^2 e della successione $x_n - y_n$ in l^1 per $n \to +\infty$.

2) [10 punti] Discutere l'invertibilitá locale della mappa

$$F(x,y) = \left(e^y \ln(1+x), (x+1)^2 \frac{y}{y^2+1}\right)$$

in $(0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di $(0,0)$ per cui la funzione inversa G esiste. Trovare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di G rispetto a $(0,0)$.

3) [10 punti] Dato $r > 0$, sia $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ e sia

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2, \; x, y, z > 0\}.$$

a) Determinare l'estremo inferiore/superiore di f in S, discutendo eventualmente i punti ove viene raggiunto.

b) Mostrare che $\forall \; a, b, c > 0$ vale

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5 .$$