Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 tutorato 10

A.A 2008-2009
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G.Mancini, E. Padulano
Tutorato 10 del 25 Maggio 2009

Esercizio 2 Sia $\omega = zdx + (x+z)dy + (y+e^x)dz$ calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è la curva $\gamma(t) = (\cos t, t, \sin^2 t)$.

Esercizio 3 Sia $\omega = \left(\frac{y^2e^x}{1+z^2} + 2x\sin^2 y\right)dx + \left(\frac{2ye^x}{1+z^2} + 2x^2 \sin y \cos y\right)dy + \left(1 - \frac{2zy^2e^x}{(1+z^2)^2}\right)dz$

(a) Provare che ω è una forma differenziale chiusa

(b) Dimostrare che ω è una forma esatta e determinarne un potenziale

(c) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) = \left(te^t\ ,\ t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), t^5\right) \quad t \in [0,1]$

Esercizio 5 Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per la forma differenziale $\omega = (x-y^2)dx - (x+y)dy$ nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\ ,\ x+|y| \leq 0\}$

Esercizio 7 Sia $\gamma(t) = \begin{cases} (\cos^3 t, \sin t) & \text{se } t \in [0,\pi] \\ (\cos t, \sin t) & \text{se } t \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] \\ (1+\sin t, -1+\cos t) & \text{se } t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$

Disegnare la traccia di γ e utilizzare il teorema di Gauss-Green per calcolare l'area della regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata da γ.

Esercizio 11 Siano $F(x,y) = (2y - x^2, ye^x)$ ed $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \log 2]\ ,\ |y| \leq \sinh x\}$ Calcolare $\int_{\partial E} < F\ ,\ \tau > ds$ (dove τ è la normale esterna ad E) sia direttamente che utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 13 Sia $F(x,y,z) = \big(x - y\ ,\ xyz\ ,\ xy^3\big)$. Verificare la validità del teorema della divergenza nell' insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

Esercizio 17 Sia $\omega = xz\ dx + y\ dy + \left(\frac{1}{2}x^2 + yz\right)dz$ verificare la validità del teorema di Stokes per ω sulla superficie $z = x^2 + xy$ con $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq x\}$

Esercizio 19 Sia $\omega = \left(-\frac{8e^{x^2}x}{(4x^2+y^2)^2} + \frac{2xe^{x^2}}{4x^2+y^2}\right)dx - 2\left(y + \frac{e^{x^2}y}{(4x^2+y^2)^2}\right)dy.$

(a) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è il bordo dell'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$

(b) Stabilre se ω è chiusa

(c) Stabilire se ω è esatta

Esercizio 23 Sia $C \subseteq \mathbb{R}^3$ il cono avente per base l'ellisse $4x^2 + y^2 \leq 4$ con vertice nel punto $(0,0,2)$ e sia $F(x,y,z) = (x^2z, yz + x^3, x - yz^2)$. Calcolare $\int_{\partial C} F \cdot \nu\ d\sigma$ sia direttamente che utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 29 Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\ ,\ 0 \leq x \leq \sqrt{y - y^2}\}$ e sia $\omega = (x-y)dx + \frac{yz^2}{x^2+y^2+z^2}dy + x^2z\ dz$. Calcolare $\int_{\partial^+\Sigma} \omega$ sia direttamente che utilizzando il teorema di Stokes.