

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 8 (21 NOVEMBRE 2008)

DERIVAZIONE IN PIÙ VARIABILI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(d) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2 z^2}{x^2+y^4+z^6} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$(f) f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2. Stabilire se le seguenti funzioni possono essere estese a funzioni di classe C^1 su tutto \mathbb{R}^2 .

$$(a) f(x, y) = \frac{xy^4}{x^6 + y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}$$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha > 0$ l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità nell'origine della funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^6 + y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

- Continua, derivabile in ogni direzione ma non parzialmente derivabile.
- Continua, parzialmente derivabile ma derivabile non in tutte le direzioni.
- Continua ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni.
- Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione ma discontinua.
- Parzialmente derivabile ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.
- Derivabile in ogni direzione ma discontinua e non parzialmente derivabile.