Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Tutorato numero 5 (24 Ottobre 2008)
Limiti in più variabili, ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo: *http://www.lifedreamers.it/liuck*

1. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+\left(x^2+y^2\right)\cos\left(x^4+y^7\right)}{x^2+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$

2. Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

3. Discutere al variare del parametro $\alpha>0$ la continuità della funzione $f(x,y)=\begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4. Sia $f_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{\sqrt{t+x}}dt$; calcolare, effettuando un cambio di variabile ed una integrazione per parti, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e stabilire se la convergenza è uniforme.

5. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\left(2^n+3^n\right)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-i^n\right)^n z^n$