Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 7 (7 Novembre 2008)
Limiti in più variabili, ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è sicuramente continua al di fuori dell'origine, e inoltre lo è anche nell'origine perchè $\left|\frac{x^2y-xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq$
$\leq\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}+\frac{|x|y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{\left(x^2+y^2\right)|y|}{x^2+y^2}+\frac{|x|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=$
$=|y|+|x|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0.$

   (b) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è continua perché
$\left|\frac{\arctan\left(x^3y^2\right)}{x^4+y^6}\right|\leq\frac{|x|^3y^2}{x^4+y^6}=\frac{\left(x^4\right)^{\frac34}\left(y^6\right)^{\frac13}}{x^4+y^6}\leq$
$\leq\frac{\left(x^4+y^6\right)^{\frac34}\left(x^4+y^6\right)^{\frac13}}{x^4+y^6}=\left(x^4+y^6\right)^{\frac{1}{12}}\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0.$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è continua nell'origine: infatti, fissato $\alpha>0$ esiste un opportuno c_α tale che $|\log x|<\frac{c_\alpha}{x^\alpha}$,
dunque $\left|\frac{x^2y^2\log\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{c_\alpha\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{1+\alpha}}=$
$=c_\alpha\left(x^2+y^2\right)^{1-\alpha}\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0.$

   (d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} & \text{se } x\neq0\\ \frac{y^2}{2\pi} & \text{se } x=0\end{cases}$ è ovviamente continua al di fuori dell'asse delle y, quindi ci limitiamo a studiare il comportamento della funzione su questo asse: nei punti del tipo $(0,y_0)$ con $y_0>0$, avvicinandoci da sinistra lungo la retta orizzontale abbiamo
$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+y_0^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y_0}{x}\right)}=+\infty$ e quindi la funzione non è continua; nei punti $(0,y_0)$ con $y_0<0$, se ci avviciniamo da destra lungo la retta orizzontale abbiamo $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+y_0^2}{\pi+2\arctan\left(\frac{y_0}{x}\right)}=+\infty$, quindi la funzione non è continua neanche in questi punti, e non è continua neanche nell'origine perché, muovendosi lungo la curva $x=y^3$ abbi-

amo $\lim_{y\to 0} \dfrac{y^6+y^2}{\pi + 2\arctan\left(\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to 0} \dfrac{y^4+1}{2} \dfrac{y^2}{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{y^2}\right)} =$
$= \dfrac{1}{2} \lim_{z\to 0} \dfrac{z}{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{2} \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{1+z^2}} = \dfrac{1}{2}.$

(e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{|yz|}}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ non è continua perchè $f(x,x,x) = \dfrac{x|x|}{3x^2} \overset{x\to 0}{\not\to} 0.$

2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt$ è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$; inoltre, la convergenza della serie è totale (e quindi anche uniforme) su tutto $\mathbb{R}$, perchè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, e dunque la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, perché le somme parziali sono continue (in quanto somme finite di funzioni continue) e la convergenza uniforme mantiene la continuità; per quanto riguarda la derivabilità, notiamo innanzi tutto che $\displaystyle\frac{1}{n^2} \int_0^{nx} e^{-t^2} dt \overset{\left(y=\frac{t}{n}\right)}{=} \frac{1}{n} \int_0^x e^{-n^2t^2} dt$, e dunque la serie delle derivate è $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n}$: questa serie converge totalmente in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \frac{e^{-n^2x^2}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\delta^2}}{n} <$ $< +\infty$ e dunque, per il teorema di derivazione per serie di funzioni, f è derivabile $\forall x \neq 0$; in $x = 0$ la funzione non è derivabile perché $f'(0) =$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx} \int_0^x e^{-n^2t^2} dt \geq$$
$$\geq \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nx} \int_0^x e^{-n^2t^2} dt = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 0} \frac{1}{nx} \int_0^x e^{-n^2t^2} dt = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-n^2x^2}}{n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > M \ \forall M > 0.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)} \right| \leq \frac{1}{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} < +\infty$, e per $\alpha < -1$ la serie converge anche in $x = 0$ perché nell'origine la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha$; la convergenza è totale in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)} \right| = \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\delta^2} < +\infty$, mentre in

$(-\delta,\delta)$ la convergenza è uniforme e totale $\Leftrightarrow \alpha<-1$, perché per $\alpha<-1$ abbiamo $\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{(-\delta,\delta)}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x(1+n^2x^2)}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\delta,\delta)}\left|\frac{\sin(n^\alpha x)}{x}\right|\le$
$\le\sum_{n=0}^{\infty}\sup_{x\in(-\delta,\delta)}\left|\frac{n^\alpha x}{x}\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}n^\alpha<+\infty$, mentre per $\alpha\ge 1$ la convergenza non può essere uniforme né totale in quanto non c'è convergenza nell'estremo $x=0$.
Grazie alla convergenza uniforme su $[\delta,+\infty)$ è possibile scambiare serie e integrali in entrambi i casi, perché la serie è a termini positivi $\forall x>0$, dunque $\int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx\le$
$\le\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+n^2x^2)}\overset{(t=nx)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{\infty}\frac{\frac{dt}{n}}{\frac{x}{n}(1+t^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^2)}\le$
$\le\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{+\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^2}<+\infty\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$; se $\alpha<0$ inoltre $\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx\le$
$\le\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{|n^\alpha x|}{x(1+n^2x^2)}dx\overset{(t=nx)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^n\frac{n^{\alpha-1}t}{\frac{t}{n}(1+t^2)}\frac{dt}{n}\le$
$\le\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}n^{\alpha-1}$, mentre se $\alpha\ge 0$ abbiamo che
$\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}dx\ge$
$\ge\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n^\alpha}}\frac{|\sin(n^\alpha x)|}{x(1+n^2x^2)}\overset{(t=nx)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}\frac{\left|\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)\right|}{\frac{t}{n}(1+t^2)}\frac{dt}{n}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{n^{1-\alpha}}\frac{\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)}{t(1+t^2)}dt\ge\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\inf_{x\in(0,n^{1-\alpha}]}\frac{\sin\left(n^{\alpha-1}t\right)}{n^{\alpha-1}t}\int_0^{n^{1-\alpha}}\frac{dt}{1+t^2}=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\inf_{x\in(0,1]}\frac{\sin x}{x}[\arctan t]_0^{n^{1-\alpha}}=\sin 1\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\arctan\left(n^{1-\alpha}\right)$, che diverge perché se $\alpha\ge 1$ allora $n^{1-\alpha}\le 1$ e dunque $\arctan\left(n^{1-\alpha}\right)\ge\frac{n^{1-\alpha}}{2}=\frac{2}{n^{\alpha-1}}$, mentre se $0<\alpha<1$ si ha $n^{1-\alpha}\ge 1$ e dunque per la monotonia dell'arcotangente $\arctan\left(n^{1-\alpha}\right)\ge\frac{\pi}{4}$ e otteniamo $\frac{\pi\sin 1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}$ che diverge.

4. Se f è continua e strettamente positiva, allora $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ è una funzione ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}^n$; inoltre, $\lim_{\|x\|\to\infty}g(x)=+\infty$, quindi, essendo g continua e coerciva su $\mathbb{R}^n$, che è un insieme chiuso, avrà un punto di minimo assoluto, ovvero $\exists x_0\in\mathbb{R}^n$ tale che $g(x)\ge g(x_0)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$; ma allora, essendo $\frac{1}{f(x)}=g(x)\ge g(x_0)=\frac{1}{f(x_0)}$, si avrà $f(x)\le f(x_0)$, quindi x_0 è un punto di massimo assoluto.

Nel nostro caso, $f(x,y)$ è continua e $0 < \dfrac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan\left(1+y^6\right)} \leq$
$\leq \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e quindi verifica tutte le ipotesi; inoltre,
$\dfrac{\sin\left(e^{-x^4}\right)}{1+x^2+y^2+\arctan\left(1+y^6\right)} \leq \dfrac{\sin 1}{1+\frac{\pi}{4}} = f(0,0)$, quindi $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$
$= \dfrac{\sin 1}{1+\frac{\pi}{4}}$.