Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 6 (31 OTTOBRE 2008)
LIMITI IN PIÙ VARIABILI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, perché $\left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\left(y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$
$= y^2 \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4} = 0$, perché $\left|\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^2+y^4}\right| \le \frac{\left|x^3\right|}{x^2+y^4} \le$
$\le \frac{|x|\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4} = |x| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

   (c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ non esiste perché lungo la direzione $(x,0,0)$ questa quantità è sempre nulla, mentre lungo la curva $\left(x,x^2,x\right)$ vale $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt{x^4+2x^2}} \overset{x\to 0}{\to} +\infty$.

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|xy|)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è chiaramente continua al di fuori dell'origine; tuttavia, nell'origine è discontinua, perché $f(x,x) = \frac{\log\left(1+x^2\right)}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} & \text{se } x\ne y \\ e^{-xy} & \text{se } x=y \end{cases}$ è ovviamente continua all'infuori della bisettrice del primo e terzo quadrante; tuttavia, la funzione è continua anche lungo questa retta, perché, per il teorema della media integrale, si ha $\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} = e^{-z^2}$ per un opportuno $z\in[x,y]$, quindi
$\left|\frac{\int_x^y e^{-t^2}dt}{y-x} - e^{-xy}\right| = \left|e^{-z^2}-e^{-xy}\right| \overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to} \left|e^{-x_0^2}-e^{-x_0^2}\right| = 0$.

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz^3}{x^6+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z)\ne(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{x^2yz^3}{x^6+y^2+z^4}\right| = \frac{\left(x^6\right)^{\frac{1}{3}}\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(z^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^2+z^4} \le$
$\le \frac{\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^2+z^4} =$
$= \left(x^6+y^2+z^4\right)^{\frac{7}{12}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(7x^8+2y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è continua $\Leftrightarrow \alpha < \dfrac{3}{8}$: se $\alpha \geq \dfrac{3}{8}$, lungo la curva $y = x^2$ la funzione vale $f(x,x^2) = \dfrac{x^3}{9|x|^{8\alpha}} = \dfrac{|x|^{3-8\alpha}}{9} \overset{x\to 0}{\nrightarrow} 0$; se invece $\alpha < \dfrac{3}{8}$, $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|xy|}{(7x^8+2y^4)^\alpha} = \dfrac{\left(x^8\right)^{\frac{1}{8}}\left(y^4\right)^{\frac{1}{4}}}{(7x^8+2y^4)^\alpha} \leq$
$\leq \dfrac{\left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{1}{8}}\left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{1}{4}}}{(7x^8+2y^4)^\alpha} = \left(7x^8+2y^4\right)^{\frac{3}{8}-\alpha} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0.$

4. (a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in [-1,1]$ e la convergenza è uniforme in quanto $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

   (b) $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x) \overset{n\to\infty}{\to} \chi_{\mathbb{Z}}$, perché $\cos^2(\pi x) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, e quindi la convergenza non è uniforme perché la funzione limite non è continua; la convergenza è tuttavia uniforme negli intervalli del tipo $[n+\delta, n+1-\delta]$ poiché $\displaystyle\sup_{[n+\delta,n+1-\delta]} |f_n(x)| = f_n(n+\delta) =$
   $= f_n(n+1-\delta) = \cos^{2n}(\pi\delta) \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

   (c) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} \chi_{\{0\}}$, che non è continua in 0 e quindi la convergenza non è uniforme; tuttavia, $\forall \delta > 0$ si ha che $\displaystyle\sup_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \leq \sup_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\frac{1}{nx}\right| \leq \frac{1}{n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi la convergenza è uniforme in $(-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)$.

5. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{x^n + n^n}$ converge in $(-1,1)$ perché, applicando il criterio della radice, si ha che $\displaystyle\sqrt[n]{\left|\frac{(xn)^n}{x^n+n^n}\right|} = |x|$ e in $x = \pm 1$ la serie vale rispettivamente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{1+n^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(-1)^n + n^n}$ che divergono entrambe; la convergenza non è uniforme perché ai bordi del dominio la serie diverge, ma totale su $[-1+\delta, 1-\delta]$ in quanto
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} \left|\frac{(xn)^n}{x^n+n^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |x^n| \frac{n^n}{n^n-1} \leq$
   $\displaystyle\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta^n < +\infty.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$ converge $\Leftrightarrow -1 < \cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$; la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) sugli intervalli $(k\pi, (k+1)\pi)$ perché la serie non converge sul bordo dell'intervallo, ma è totale (e quindi anche uniforme) sugli intervalli $[k\pi + \delta, (k+$

$+1)\pi-\delta], \forall\delta>0$ perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{[k\pi+\delta,(k+1)\pi-\delta]} |\cos^n x| =$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n(k\pi+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \delta = \frac{1}{1-\cos\delta} < +\infty.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\log n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\log n \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} =$
$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}$ e dunque è una serie armonica generalizzata e converge $\Leftrightarrow \log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) < -1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2-1}{x^2+1} <$
$< \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow 0 < x^2-1 < \dfrac{x^2}{e} + \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2\left(1-\frac{1}{e}\right) < 1+\frac{1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 < \frac{1+\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ |x| < \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}, -1\right) \cup$
$\cup \left(1, \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\right)$; poiché per $x = \pm\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}$ la serie diverge (armonica di esponente 1), la convergenza non può essere né uniforme né totale, ma è totale e uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-a,-1)\cup(1,a]$
$\forall a \in \left(1, \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\right)$, perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in[-a,-1)\cup(1,a]} \left| n^{\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)} \right| =$
$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)} < +\infty.$

6. Notiamo che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = i \Leftrightarrow z$ è una delle determinazioni del logaritmo di i, cioè $z = \log|i| + i\,(\arg i + 2k\pi i) = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$