Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 4 (17 Ottobre 2008)
Funzioni analitiche, variabili complesse, serie di Fourier

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\log(-4) = \log|-4| + i(\arg(-4) + 2k\pi) = \log 4 + \pi i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (b) $\log(1+\sqrt{3}i) = \log|1+\sqrt{3}i| + i(\arg(1+\sqrt{3}i) + 2k\pi) = \log 2 + \frac{\pi i}{3} +$
   $+2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (c) $\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\pi i)^n}{n!}\right) = \log(\exp(3\pi i) - 1) = \log(-2) = \log 2 + \pi i +$
   $+2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

   (d) $\sqrt[3]{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{3}} = \exp\left(\frac{1}{3}\log(1+i)\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} +\right.\right.$
   $\left.\left. +2k\pi i\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\log\sqrt{2}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{12} + \frac{2}{3}k\pi i\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} +\right.\right.$
   $\left.\left. +\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right), k \in \mathbb{Z}$.

   (e) $(3i)^{\sqrt{2}} = \exp\left(\sqrt{2}\log(3i)\right) = \exp\left(\sqrt{2}\left(\log 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i\right)\right) =$
   $= \exp\left(\sqrt{2}\log 3\right)\exp\left(\frac{\sqrt{2}\pi i}{2} + 2\sqrt{2}k\pi i\right) = 3^{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} +\right.\right.$
   $\left.\left. +2\sqrt{2}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + 2\sqrt{2}k\pi\right)\right), k \in \mathbb{Z}$.

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1-i}{1+i}} = i^{-i} = \exp(-i\log i) = \exp\left(-i\left(\log 1 + \frac{\pi i}{2} +\right.\right.$
   $\left.\left. +\ 2k\pi i\right)\right) = \exp(-i\log 1)\exp\left(-i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$: utilizzando il criterio del rapporto troviamo che $r =$
   $= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, quindi la serie converge solamente in $z = 0$.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n + i\sin n) z^n$ ha come raggio di convergenza $r =$
   $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos n + i\sin n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$: sul bordo di questo disco la serie non converge perché il termine n-esimo ha modulo 1: infatti, $|(\cos n + i\sin n) z^n| = |\cos n + i\sin n| \cdot |z|^n =$
   $= 1 \cdot |1|^n = 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2(2i)^n}$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2(2i)^n}\right|}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 2^n} = 2$; sul bordo del disco la serie converge assolutamente perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2(2i)^n}\right| =$
$\displaystyle= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n!} z^n$: $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(1+2i)^n}{n!}}{\frac{(1+2i)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+2i)^n\,(n+1)!}{n!\,(1+2i)^{n+1}} \right| =$
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|1+2i|} = \infty$, quindi la serie converge su tutto $\mathbb{C}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cosh(in) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos nz^n$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos n|}} = 1$; ai bordi del dominio la serie non converge perché il termine n-esimo non tende a 0.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan n)^n z^n$: $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\arctan n|^n}} =$
$= \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |\arctan n|} = \dfrac{2}{\pi}$; sul bordo del disco di convergenza la serie diverge, perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, $|(\arctan n)^n z^n| = \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^n = e^{n \log\left(\frac{2}{\pi}\arctan n\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{2}{\pi}}$, perché
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}} =$
$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \log(\arctan x)}{\frac{1}{x}}$; per la regola di de l'Hôpital, questo limite è uguale a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{(x^2+1)\arctan x} =$
$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\arctan x} = -\frac{2}{\pi}.$

3. (a) $f(x) = \sin x \cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2} = \dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i}$ è un polinomio trigonometrico e dunque questo è il suo sviluppo in serie di Fourier.

(b) $f(x) = x^2$: calcoliamo i coefficienti di Fourier: $\hat{f}_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx =$
$= \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi^3}{3} + \dfrac{\pi^3}{3}\right) = \dfrac{\pi^2}{3}$, mentre per $n \neq 0$ si ha $\hat{f}_n =$
$\displaystyle= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{x^2 e^{-inx}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx\right) =$
$\displaystyle= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{\pi^2 e^{-in\pi} - \pi^2 e^{in\pi}}{-in}\right) - \left[\frac{2x e^{-inx}}{i^2 n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{i^2 n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx\right) =$
$\displaystyle= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi e^{-in\pi} + 2\pi e^{in\pi}}{-n^2}\right) = \frac{2e^{in\pi}}{n^2}$; notiamo che $e^{in\pi} = \cos n\pi +$

$+i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$, dunque $\hat{f}_n = \dfrac{2\,(-1)^n}{n^2}$; lo sviluppo in serie di Fourier diventa quindi $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2 \displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$. Sostituendo $x = 0$ in questa espressione otteniamo che $0 = \dfrac{\pi}{3} +$

$+2 \displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 2 \sum_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{3} +$

$+2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{-n}}{(-n)^2} = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} =$

$= -\dfrac{\pi^2}{12}$. Sostituendo $x = \pi$ invece si ottiene $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} +$

$+2 \displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} e^{in\pi} = \dfrac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \dfrac{\pi^2}{3} +$

$+2 \displaystyle\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

(c) $f(x) = e^x$: calcoliamo i coefficienti di Fourier: $\hat{f}_n =$ $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)} dx = \left[\dfrac{e^{x(1-in)}}{2\pi(1-in)} \right]_{-\pi}^{\pi} =$

$= \dfrac{e^{\pi - in\pi} - e^{-\pi + in\pi}}{2\pi(1-in)} = \dfrac{e^{in\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{2\pi(1-in)} \dfrac{1+in}{1+in} = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(\dfrac{(-1)^n}{1+n^2} + \right.$

$\left. +i \dfrac{(-1)^n n}{1+n^2} \right) \Rightarrow e^x = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{1+n^2} + i \dfrac{(-1)^n n}{1+n^2} \right) e^{inx}$.

4. Come nei reali, anche nei complessi si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$; riscrivendo il numero z in forma polare, l'identità diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (r\exp(ix))^n =$ $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(inx)$, e applicando le Formule di Eulero $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(inx) =$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos(nx) + i\sin(nx)) = \dfrac{1}{1 - r(\cos x + i\sin x)} =$

$= \dfrac{1}{1 - r\cos x - ir\sin x} \dfrac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - r\cos x + ir\sin x} =$

$= \dfrac{1 - r\cos x + ir\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2\sin^2 x} = \dfrac{1 - r\cos x}{r^2 - 2r\cos x + 1} +$

$+i \dfrac{r\sin x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$. Uguagliando i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria, si trova che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \dfrac{1 - r\cos x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(nx) = \dfrac{r\sin x}{r^2 - 2r\cos x + 1}$.

5. Supponiamo che f non sia la funzione identicamente nulla, ovvero che

$\exists x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) \neq 0$; allora, per il teorema della permanenza del segno, per un certo $\epsilon > 0$ si avrà $f(x) \neq 0 \; \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; allora, essendo $f(x)g(x) = 0$, dovrà essere $g(x) = 0 \; \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, ma allora, essendo g una funzione analitica, se è nulla nell'intervallo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ lo sarà anche in tutto (a,b). Un controesempio, con funzioni C^∞ ma non analitiche, è il seguente: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.