Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 3 (10 OTTOBRE 2008)
SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR, SERIE DI POTENZE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^5 x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n n^5|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5}} =$ $= \frac{1}{1} = 1$; per $x = 1$ abbiamo $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^5$ che non converge e per $x = -1$ abbiamo $\sum_{n=0}^{\infty} n^5$, che diverge.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}x^n : r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{1}{0} = \infty$, quindi la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{e^n}x^n$: utilizzando il criterio del rapporto abbiamo che $r =$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^n}\frac{e^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+1} = 0$, quindi la serie converge solo per $x = 0$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}x^n$: sappiamo che $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}\right|}} = 1$; per $x = 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}$ diverge (confronto con la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$) mentre per $x = -1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2}$ converge per il criterio di Leibniz (infatti, $\frac{n^2+n+1}{n^3+n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}$ che è decrescente in quanto somma di successioni decrescenti).

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)x^n$: notiamo innanzi tutto che la quantità $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ vale 0 per n pari, vale 1 per $n \equiv 1 \bmod 4$ e -1 per $n \equiv 3 \bmod 4$; di conseguenza avremo $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sin(\frac{n\pi}{2})|}} = \frac{1}{1} = 1$; infine, ai bordi del raggio di convergenza la serie non converge perché $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ e $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ non soddisfano la condizione necessaria che l'n-esimo termine tenda a 0.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}-3\right)^n$: posto $y=\frac{x}{2}-3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ che ovviamente converge $\Leftrightarrow -1<y<1$; la serie di partenza dunque converge $\Leftrightarrow -1<\frac{x}{2}-3<1 \Leftrightarrow 4<x<8$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$: posto $y=\frac{x^2}{3}$, la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^2}$, che converge $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1\le y\le 1$, cioè $\Leftrightarrow -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{\log n}x^n$: $r=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^{\log n}|}}=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{\log n}{n}}}=$ $=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\log n^{\frac{\log n}{n}}}}=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\log n}{n}\log n}}=$ $=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{\log^2 n}{n}}}=\dfrac{1}{e^0}=1$; per $x=\pm 1$ abbiamo le serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\log n}$ che non convergono perchè il termine n-esimo non tende a 0.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^{3n}+3^{2n}\right)x^n$: $r=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n\,2^{3n}+3^{2n}|}}=$ $=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{8^n+9^n}}=\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n+1\right)}}=\dfrac{1}{9}$; ai bordi di questo intervallo abbiamo le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}+3^{2n}}{9^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{3n}+3^{2n}}{9^n}$ che non convergono perché il termine n-esimo non tende a 0.

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(4x)^n}$: ponendo $y=\frac{1}{4x}$, abbiamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}y^n$; applicando il criterio del rapporto, abbiamo che $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=$ $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}(n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$; il raggio di convergenza è dunque $\frac{1}{e}$; per $x=\frac{e}{4}$ la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!e^n}$ che per la formula di Stirling si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ che diverge; infine, per $x=-\frac{e}{4}$ la serie vale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}$ che converge per Leibniz perché il termine n-esimo, comportandosi come $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, tende a 0, e inoltre è decrescente perché il rapporto tra il termine $n+1$-esimo e quello n-esimo è pari a $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}\dfrac{e^n n!}{n^n}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{e(n+1)n^n}=\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{e}{e}=1$.

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt$: notiamo che, per il teorema della media integrale, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{{c_n}^2}$ per un opportuno $\sqrt{n} \leq$ $\leq c_n \leq \sqrt{n}+1$; quindi si ha che $e^n \leq e^{{c_n}^2} \leq e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}}$, ma $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} = e$ e $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}} = \limsup_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^2} = e$ e quindi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}} = e$. Dunque $r = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{{c_n}^2}}} = \dfrac{1}{e}$; sul bordo dell'intervallo di convergenza, per $x = \dfrac{1}{e}$ la serie vale $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt}{e^n}$, ma essendo $\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt \geq e^n$, questa quantità è maggiore di $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ e dunque diverge, mentre in $x = -\dfrac{1}{e}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+1} e^{t^2}\, dt}{e^n}$ che non converge perché ha termine n-esimo, in modulo, maggiore di 1.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$: utilizzando il criterio del rapporto abbiamo che $r = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1 -$ $- \dfrac{1}{(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1$; per $x = \pm 1$ si hanno le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$ che non convergono perchè il termine n-esimo non tende a 0.

2. (a) $f(x) = \log\left(1 - x^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{\left(x^3\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{x^{3n+3}}{n+1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x+10} = \dfrac{1}{10} \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{x}{10}\right)} = \dfrac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{x}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{10^{n+1}}$.

(c) $f(x) = e^{x^2-1} = \dfrac{e^{x^2}}{e} = \dfrac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!}$.

(d) $f(x) = \dfrac{\arctan\left(x^5\right)}{x^5} = \dfrac{1}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\left(x^5\right)^{2n+1}}{2n+1} =$

$$= \frac{1}{x^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{10n+5}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{10n}}{2n+1}.$$

3. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=x\cosh x.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!2^{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}-$
$\displaystyle-\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n=x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=$
$\displaystyle=\frac{x}{(1-x)^2}$, ove il terzo passaggio è giustificato dal fatto che nelle serie di potenze si può derivare termine a termine.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}dt=\int_0^x dt\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}=$
$\displaystyle=\int_0^x\log(t+1)dt=[(t+1)\log(t+1)-t-1]_0^x=(x+1)\log(x+1)-x,$
ove il secondo passaggio è giustificato dal fatto che nelle serie di potenze si può integrare termine a termine.

4. (a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1 dx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}=\int_0^1 dx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}=$
$\displaystyle=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$

(b) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{dx}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx=$
$\displaystyle=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1=$
$\displaystyle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}.$