Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 12 (12 Dicembre 2008)
Equazioni differenziali, ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\ddddot{x} - 4x = 0$: il polinomio caratteristico associato all'equazione è $P(\lambda) = \lambda^4 - 4$, che ha come radici $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{2}i$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + $ $+ c_4 \sin\left(\sqrt{2}t\right)$.

   (b) $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} - 2\ddddot{x} + \dddot{x} - \ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$: il polinomio caratteristico è $P(\lambda) =$ $= \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 1 = \left(\lambda^3 - 1\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) =$ $= (\lambda - 1)^3 \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)$, che ha come radici 1 (con molteplicità algebrica 3) e $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, quindi l'integrale generale sarà $x(t) = e^t\,(c_1 +$ $+ c_2 t + c_3 t^2) + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_4 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_5 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$.

   (c) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{2t}$: il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$, dunque l'integrale generale dell'omogenea associata è $P(\lambda) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$; a questo punto, cerchiamo una soluzione particolare usando il metodo simpatia, cioè la cerchiamo del tipo ae^{2t}: $x(t) = ae^{2t} \Rightarrow \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) =$ $= -6ae^{2t}$, dunque si ha una soluzione particolare per $a = -\dfrac{1}{6}$; l'integrale generale sarà dunque $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \dfrac{e^{2t}}{6}$.

   (d) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = 4t$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 =$ $= \left(\lambda^2 - 4\right)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)$, quindi l'omogenea associata ha come integrale generale $e^{2t}(c_1 + c_2 t) + c_3 e^{-2t}$; cerchiamo ora una soluzione simile al termine forzante, cioè del tipo $x(t) = at + b$: $\dddot{x}(t) -$ $-2\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 8at + 8b - 4a = 4t \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{4}$, dunque l'integrale generale è $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + c_3 e^{-2t} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}$.

2. (a) $\begin{cases} \dddot{x} - \dot{x} = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$, che ha per radici 0 e ± 1, dunque l'integrale generale è $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3$; imponiamo ora le condizioni iniziali: essendo $\dot{x}(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$ e $\ddot{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, si

avrà $\begin{cases} \ddot{x}(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ \dot{x}(0) = c_1 - c_2 = 0 \\ x(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 3 \end{cases}$, che ha per soluzione $(c_1, c_2, c_3) =$
$= (1, 1, 1)$, dunque la soluzione è $x(t) = e^t + e^{-t} + 1$.

(b) $\begin{cases} \ddddot{x} + 2\ddot{x} + x = 0 \\ \dddot{x}(0) = 1 \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 =$
$= (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$, dunque ci sono radici complesse multiple e perciò l'integrale generale sarà $c_1 \sin t + c_2 t \sin t + c_3 \cos t + c_4 t \cos t$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dddot{x}(0) = [(-c_1 - 3c_4)\cos x - c_2 t \cos t + (c_3 - 3c_2)\sin t + c_4 t \sin t]_{t=0} = -c_1 - 3c_4 = 1 \\ \ddot{x}(0) = [(-c_1 - 2c_4)\sin t - c_2 t \sin t + (2c_2 - c_3)\cos t - c_4 t \cos t]_{t=0} = 2c_2 - c_3 = 1 \\ \dot{x}(0) = [(c_1 + c_4)\cos t + c_2 t \cos t + (c_2 - c_3)\sin t - c_4 t \sin t]_{t=0} = c_1 + c_4 = 1 \\ x(0) = [c_1 \sin t + c_2 t \sin t + c_3 \cos t + c_4 t \cos t]_{t=0} = c_3 = 1 \end{cases};$$

le soluzioni di questo sistema sono $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (2, 1, 1, -1)$, dunque la soluzione del sistema è $x(t) = (2 + t)\sin t + (1 - t)\cos t$.

(c) $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \sin t \\ \dot{x}(0) = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$, dunque l'integrale generale dell'omogenea associata è $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$; cerchiamo una soluzione particolare col metodo simpatia: $x(t) = a \cos t + b \sin t \Rightarrow$
$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 3a \cos t + 3b \sin t = \sin t \Leftrightarrow a = 0, b = \dfrac{1}{3}$, dunque l'integrale generale dell'equazione è $c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \dfrac{\sin t}{3}$; imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = \left[-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t) + \frac{\cos t}{3}\right]_{t=0} = 2c_2 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ x(0) = \left[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{\sin t}{3}\right]_{t=0} = c_1 = \frac{3}{2} \end{cases};$$ le

soluzioni di questa equazione sono $(c_1, c_2) = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, dunque la soluzione è $x(t) = \dfrac{3}{2}\cos(2t) - \dfrac{\sin(2t)}{2} + \dfrac{\sin t}{3}$.

(d) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t \\ \ddot{x}(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$, dunque
l'omogenea associata ha come soluzione $e^t \left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2\right)$; cerchiamo ora una soluzione particolare con il metodo simpatia, facendo però attenzione al fatto che il termine forzante è soluzione anche dell'omogenea associata, quindi dovremo cercare una soluzione del tipo $x(t) = at^3 e^t$: si ha $\dddot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - x(t) = 6ae^t$, dunque una soluzione particolare si ha per $a = \dfrac{1}{6}$ e l'integrale generale è $e^t \left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dfrac{t^3}{6}\right)$; imponiamo infine le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \ddot{x}(0) = \left[e^t\left((c_1+c_2+2c_3)+(c_2+2c_3+1)t+\left(c_3+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1+c_2+2c_3=1 \\ \dot{x}(0) = \left[e^t\left((c_1+c_2)+(c_2+2c_3)t+\left(c_3+\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1+c_2=3 \\ x(0) = \left[e^t\left(c_1+c_2t+c_3t^2+\frac{t^3}{6}\right)\right]_{t=0} = c_1 = 2 \end{cases};$$

le soluzioni di questo sistema sono $(c_1, c_2, c_3) = (2, 1, -1)$ e quindi la soluzione è $e^t\left(2+t-t^2+\dfrac{t^3}{6}\right)$.

3. $\dddot{x} - x = e^{-t}$; cerchiamo innanzi tutto tutte le soluzioni di questa equazione, poi imporremo le condizioni: il polinomio caratteristico dell'equazione è $\lambda^3 - 1$, che ha come radici 1 e $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, dunque l'omogenea associata ha come soluzioni $c_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$; cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x(t) = ae^{-t}$: si ha $\dddot{x} - x = -2ae^{-t}$, dunque una soluzione particolare è $-\dfrac{e^{-t}}{2}$ e l'integrale generale è $c_1e^t +$ $+e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)-\dfrac{e^{-t}}{2}$; imponiamo ora le condizioni: essendo $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)-\dfrac{e^{-t}}{2} = 0$, si avrà $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$; adesso, imponiamo la condizione iniziale $x(0) = 0$: $x(0) = \left[e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)-\dfrac{e^{-t}}{2}\right]_{t=0} = c_1 - \dfrac{1}{2}$, dunque l'altra condizione si ha $\Leftrightarrow c_1 = \dfrac{1}{2}$; riassumendo, le soluzioni dell'equazione differenziale che rispettano le condizioni sono, al variare del parametro reale c_2, le seguenti: $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}t\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)-\dfrac{e^{-t}}{2}$.

4. (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: la funzione e^{x^2} non ha zeri, dunque non esistono punti di equilibrio; inoltre, è di classe C^1 e dunque la soluzione è sempre unica; cerchiamo ora i tempi di esistenza: essendo $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} e^{-x^2}\,dx = t$, la variabile t potrà variare tra $\displaystyle\int_{x_0}^{-\infty} e^{-x^2}\,dx$ e $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, dunque l'intervallo massimale di esistenza è $\left(\Phi(x_0) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \Phi(x_0) + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, ove $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-y^2}\,dy$.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} (x^3 - x)\log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$: i punti di equilibrio sono $x_0 = 0$ e $x_0 = \pm 1$; essendo $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 - x\right)\log|x| = \left(3x^2 - 1\right)\log|x| +$

$+x^2-1$, la funzione $\left(x^3-x\right)\log|x|$ è di classe C^1 in tutti i punti tranne l'origine; nell'origine, invece, il rapporto incrementale tende a $+\infty$ e quindi la funzione non è Lipschitziana e potrebbe esserci un'altra soluzione; tuttavia, si ha $\displaystyle\int_0^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} \approx \int_0^x \frac{dy}{y\log|y|} =$ $= [\log|\log|y||]_0^x = +\infty$, dunque anche in questo caso la soluzione è unica; determiniamo ora l'intervallo di esistenza: abbiamo appena visto che $\displaystyle\int_0^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} = +\infty$, e inoltre dovrà essere anche $\displaystyle\int_1^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} = \pm\infty$ e $\displaystyle\int_{-1}^x \frac{dy}{(y^3-y)\log|y|} = \pm\infty$, perché se così non fosse la soluzione non sarebbe più unica intorno a quei punti; dunque, se $x_0 \in (-1,0)\cup(0,1)$ la soluzione è definita per tutti i tempi, altrimenti se $x_0 < -1$ l'intervallo massimale è $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|}, +\infty\right)$ mentre se $x_0 > 1$ l'intervallo è $\displaystyle\left(-\infty, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|}\right)$; in questi casi la soluzione esplode in tempo finito, rispettivamente per tempi negativi e per tempi positivi, perché $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} \frac{dx}{(x^3-x)\log|x|} = \int_{x_0}^{-\infty} -\frac{dx}{(x^3-x)\log|x|} \approx \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3\log|x|} <$ $\displaystyle< \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty.$

5. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{x^4+y^2+z^4} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ è chiaramente differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine; nell'origine, la funzione è continua perché $\displaystyle\left|\frac{x^2yz}{x^4+y^2+z^4}\right| = \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{x^2}|z|}{x^4+y^2+z^4} \leq \frac{\sqrt{x^4+y^2+z^4}\sqrt{x^4+y^2+z^4}|z|}{x^4+y^2+z^4} =$ $= |z| \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$, ed è inoltre provvista di derivate parziali identicamente nulle, in quanto la funzione è nulla sui tre assi cartesiani, e ha anche le derivate direzionali (anch'esse nulle) perché $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \frac{f(tx,ty,tz)-f(0,0,0)}{t} =$ $\displaystyle= \frac{t^4x^2yz}{t\left(t^4x^4+t^2y^2+t^4x^4\right)} = \lim_{t\to0} \frac{tx^2yz}{t^2x^4+y^2+t^2z^4} = 0$; tuttavia, f non è differenziabile perché la quantità $\displaystyle\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\langle\nabla f(0,0,0),(x,y,z)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$ $\displaystyle= \frac{x^2yz}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ lungo la direzione $\left(x,x^2,x\right)$ vale $\displaystyle\frac{x^5}{3x^4\sqrt{2x^2+x^4}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}.$

6. $f(x,y) = 3x^5-5x^3+2y^2$; per trovare i punti critici calcoliamo il gradiente della funzione: $\nabla f(x,y) = \left(15x^4-15x^2, 4y\right)$, che si annulla nei punti $(0,0)$ e $(\pm1,0)$. Per determinare la natura di questi punti critici calcoliamo la matrice Hessiana: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 60x^3-30x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, che nei tre punti critici vale rispettivamente $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, dunque il punto $(1,0)$ è di massimo locale e $(-1,0)$ è una sella, mentre sull'origine non possiamo ancora dire nulla: tuttavia, notiamo che in qualsiasi intorno dell'origine esistono punti del tipo $(x,0)$, con $x > 0$, in cui la funzione è positiva, e punti del tipo $(x,0)$ con $x < 0$ in cui la funzione è negativa; dunque, il punto $(0,0)$ non è né un punto di massimo né di minimo locale.