**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di Analisi 2

**A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini**
**Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia**

Soluzioni del tutorato numero 11 (12 Dicembre 2008)
Equazioni differenziali, massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
*http://www.lifedreamers.it/liuck*

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = 4x \\ x(0) = 3 \end{cases}$ : $\dot{x}(t) = 4x(t) \Rightarrow \dfrac{\dot{x}(t)}{4x(t)} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\dot{x}(s)}{x(s)}ds =$
$= \displaystyle\int_0^t ds \overset{x(t)=x}{=} \dfrac{1}{4}\int_3^{x(t)} \dfrac{dx}{x} = t \Rightarrow \log|x(t)| - \log 3 = 4t \Rightarrow x(t) =$
$= e^{4t+\log 3} = 3e^{4t}$. (È stato scelto il segno positivo di $x(t)$ per rispettare le condizioni iniziali.)

(b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $= \dot{x}(t) = 1 + x^2(t) \Rightarrow \displaystyle\int_0^t \dfrac{\dot{x}(s)}{x^2(s)+1}ds = \int_0^t ds \Rightarrow$
$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{x(t)} \dfrac{dx}{x^2+1} = t \Rightarrow \arctan t - \arctan 0 = t \Rightarrow x(t) = \tan(t+$
$+ \arctan 0) = \tan t$.

(c) $\begin{cases} \dot{x} - tx = 2t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ : questa equazione appartiene a quelle del tipo $\dot{x}(t)+$
$+a(t)x(t) = b(t)$, dove in questo caso $a(t) = -t$ e $b(t) = 2t^3$; dunque la soluzione sarà data da $x(t) = e^{-\int_0^t -sds}\,(x(0)+$
$+ \displaystyle\int_0^t 2s^3 e^{\int_0^s -udu} ds\Big) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(1 + 2\int_0^t s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right) = e^{\frac{t^2}{2}}\,(1+$
$+2\left[-s^2 e^{-\frac{s^2}{2}}\right]_0^t + 4\displaystyle\int_0^t s e^{-\frac{s^2}{2}} ds\Big) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(-2t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 4e^{-\frac{t^2}{2}} + 5\right) =$
$= 5e^{\frac{t^2}{2}} - 2t^2 - 4$.

(d) $\begin{cases} \dot{x} + x = \sin t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ : applichiamo lo stesso metodo del punto precedente, e in questo caso $a(t) = 1$ e $b(t) = \sin t$: $x(t) =$
$= e^{-\int_0^t ds}\left(\displaystyle\int_0^t \sin s e^{\int_0^s du} ds\right) = e^{-t}\left(\int_0^t e^s \sin s ds\right) =$
$= e^{-t}\left([e^s \sin s]_0^t - \displaystyle\int_0^t e^s \cos s ds\right) = e^{-t}\left(e^t \sin t - [e^s \cos s]_0^t +\right.$
$\left. + \displaystyle\int_0^t e^s \sin s ds\right) \Rightarrow 2\int_0^t e^s \sin s ds = 1 + e^t \sin t - e^t \cos t \Rightarrow x(t) =$
$= e^{-t}\left(\dfrac{1 + e^t \sin t - e^t \cos t}{2}\right) = \dfrac{e^t + \sin t - \cos t}{2}$.

(e) $\begin{cases} \dot{x} = 2xt^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ : $\displaystyle\int_1^{x(t)} \dfrac{dx}{x} = \int_0^t 2s^3 ds \Rightarrow \log|x(t)| - \log 1 = \dfrac{t^4}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t) = e^{\frac{t^4}{2}}$. (Anche in questo caso è stato scelto il segno positivo per rispettare le condizioni iniziali)

(f) $\begin{cases} \dot{x} = t^2x^4 \\ x(1) = 2 \end{cases}$ : $\displaystyle\int_2^{x(t)} \frac{dx}{x^4} = \int_0^t s^2 ds \Rightarrow -\frac{1}{3x(t)^3} + \frac{1}{24} = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow$
$\displaystyle\Rightarrow \frac{1}{x(t)^3} = \frac{1 - 8t^3 + 8}{8} \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{9 - 8t^3}}$.

(g) $\begin{cases} \dot{x} = xe^{tx} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ : la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema, dunque la soluzione è $x(t) = 0$

(h) $\begin{cases} t\dot{x} + x = t^2x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$ : effettuando il cambio di variabile $y(t) = tx(t)$ il sistema diventa $\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ : $\displaystyle\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_1^t ds \Rightarrow 1 - \frac{1}{y(t)} = t-$
$\displaystyle -1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2-t} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2t - t^2}$.

(i) $\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{x} \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ : effettuando il cambio di variabile $y(t) = \dot{x}(t)$ otteniamo $\begin{cases} \dot{y} = -2y \\ y(0) = -1 \end{cases}$ : $\displaystyle\int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = -2t \Rightarrow \log|y| = -2t \Rightarrow y = -e^{-2t}$, ove il segno meno è stato scelto per via dei dati iniziali: inserendo questi valori nel sistema iniziale abbiamo $\begin{cases} \dot{x} = -e^{-2t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$, e dunque $\displaystyle x(t) = 1 - \int_0^t e^{-2s} ds = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$ : se $\alpha \geq 1$, la funzione $|x|^\alpha$ è localmente lipschitziana su tutto $\mathbb{R}$ e quindi per il teorema di Picard la soluzione è unica; inoltre, la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema e quindi la soluzione è $x(t) = 0$.
Se invece $0 < \alpha < 1$, possiamo cercare un'altra soluzione con il metodo di separazione delle variabili: $\displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = t \Rightarrow \frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{x(t)}{|x(t)|} = t \Rightarrow$
$\Rightarrow x(t)|x(t)|^{-\alpha} = t(1-\alpha) \Rightarrow |x(t)|^{1-\alpha} = (1-\alpha)|t| \Rightarrow x(t) =$
$\pm((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}$: abbiamo dunque trovato altre due soluzioni del problema di Cauchy: in realtà, una soluzione del problema è data anche dalla funzione $x(t) = \begin{cases} ((1-\alpha)(t_1 - t))^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } t < t_1 \\ 0 & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ ((1-\alpha)(t - t_2))^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } t > t_2 \end{cases}$ $\forall t_1 < 0 < t_2$, dunque per $\alpha \in (0,1)$ ci sono infinite soluzioni.

3. $\displaystyle f(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{t^2} dt$: cerchiamo massimi e minimi sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: essendo $\nabla f(x,y) =$
$= \left(-2xe^{x^4}, 2ye^{y^4}\right)$, il sistema da risolvere è $\begin{cases} -2xe^{x^4} = 2\lambda x \\ 2ye^{y^4} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ ; dalla prima equazione ricaviamo che o $x = 0$ oppure $\lambda = -e^{x^4}$, mentre dalla

seconda abbiamo $y = 0$ o $e^{y^4} = \lambda$; se $x = 0$, dal vincolo otteniamo $y = \pm 1$, mentre se $y = 0$ abbiamo $x = \pm 1$, e $f(0, \pm 1) = \int_0^1 e^{t^2} dt = -\int_1^0 e^{t^2} dt = $ $= f(\pm 1, 0)$; se invece $x \neq 0 \neq y$, si ha $-e^{x^4} = \lambda = e^{y^4}$, cioè $e^{x^4} + e^{y^4} = 0$, che è assurdo; dunque, $\max_{(x,y)\in A} f(x, y) = \int_0^1 e^{t^2} dt$ e $\min_{(x,y)\in A} f(x, y) = $ $= -\int_0^1 e^{t^2} dt$.

4. $f(x, y, z) = x + y + z$: $\nabla f(x, y) = (1, 1, 1)$, dunque non ci sono punti stazionari all'interno di $A$ la funzione sarà nulla; cerchiamo ora gli estremi della funzione sul bordo del nostro insieme: $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$ ; notiamo che sicuramente $\lambda \neq 0$, perché altrimenti si avrebbe $1 = 0$, dunque abbiamo che $x = y = z = \frac{1}{\lambda}$, quindi, sostituendo questi valori nel vincolo, otteniamo $3x^2 = 1$ i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$: essendo $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\sqrt{6}$, concludiamo che $\max_{(x,y,z)\in A} f(x, y, z) = \sqrt{6}$ e $\min_{(x,y,z)\in A} f(x, y, z) = -\sqrt{6}$.

5. $\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |Tf(x) - Tf(y)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 e^{-x^2y^2} y f(y) dy - \right.$ $\left. - \int_0^1 e^{-x^2y^2} y g(y) dy \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 e^{-x^2y^2} y(f(y) - g(y)) dy \right| \leq$ $\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 e^{-x^2y^2} y|(f(y) - g(y))| dy \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 y|(f(y) - g(y))| dy \leq$ $\leq \left(\sup_{x\in[0,1]} |(f(y) - g(y))|\right) \left(\int_0^1 y dy\right) = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \|f - g\|_\infty = \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$, dunque $T$ è una contrazione.