Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 1 (26 Settembre 2008)
Successioni di funzioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f_n(x) = e^{-nx} \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; la convergenza non è uniforme su tutto $[0, +\infty)$ perché la funzione limite non è continua, ma c'è convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[\delta, +\infty)$: infatti, essendo le f_n funzioni decrescenti, $\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| = e^{-n\delta} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (c) $f_n(x) = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme in quanto $\forall\, n \in \mathbb{N} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$; c'è tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, 0] \cup [\delta, +\infty) \ \forall\delta > 0$ perché $\sup\limits_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} |f_n(x)| = 0$ se $n > \frac{1}{\delta}$.

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, ma la convergenza non è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq \left|f_n\left(n^3\right)\right| = n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty$; la convergenza è uniforme in $[-M, M] \ \forall M > 0$, perché, essendo tutte le f_n funzioni crescenti, raggiungeranno il valore massimo agli estremi dell'intervallo considerato e dunque $\sup\limits_{x\in[-M;M]} |f_n(x)| = |f_n(\pm M)| = \frac{M}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

   (e) $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$ studiando la derivata di f_n; $f_n'(x) = \frac{x^2 + n - 2x^2}{\left(x^2 + n\right)^2} = \frac{n - x^2}{\left(x^2 + n\right)^2}$; notiamo che $f_n'(x) > 0$ se $|x| < \sqrt{n}$ e $f_n'(x) < 0$ se $|x| > \sqrt{n}$ quindi f_n ha un massimo locale in $x = \sqrt{n}$ e un minimo locale in $x = -\sqrt{n}$; siccome f_n è una funzione dispari e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ si ha che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| =$ $= \left|f_n\left(\pm\sqrt{n}\right)\right| = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi la convergenza è uniforme.

   (f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2 x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = 0 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2 x}\right| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{n|x|}{n^2|x|} = \frac{1}{n}$ e dunque

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

(g) $f_n(x) = \arctan\left(n^2 - x\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme poiché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan\left(n^2 - x\right) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \left|\arctan\left(n^2 - \left(n^2 + n\right)\right) - \right.$ $\left. - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan(-n) - \frac{\pi}{2}\right| \overset{n\to\infty}{\to} \left|-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \pi$; c'è però convergenza uniforme in tutti gli intervalli del tipo $(-\infty, M]$, perché essendo le f_n funzioni decrescenti si ha
$\sup_{x\in(-\infty,M]} \left|\arctan\left(n^2 - x\right) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan\left(n^2 - M\right) - \frac{\pi}{2}\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

(h) $f_n(x) = \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, che è una funzione discontinua e quindi la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è in ogni $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ perché $\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left| \int_{-nx^2}^{nx^2} e^{-t^2} dt - \right.$ $\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \int_{-\infty}^{-nx^2} e^{-t^2} dt +$
$+ \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \int_{nx^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{-n\delta^2} e^{-t^2} dt + \int_{n\delta^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

(i) $f_n(x) = \sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza non è uniforme in tutto $\mathbb{R}$ perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}\right| \geq$
$\geq \left|\sin\left(\pi n \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2\right) e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{e}} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$; la convergenza è uniforme in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)\ \forall \delta > 0$ in quanto
$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|\sin\left(\pi n x^2\right) e^{-nx^2}\right| \leq \sup_{x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)} \left|e^{-nx^2}\right| =$
$= e^{-n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

2. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right| \leq \frac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2 + x^2} \overset{n\to\infty}{\to}$
$\overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, e anche in questo caso la convergenza è uniforme, perché $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, dunque sono verificate le ipotesi del teorema di derivazione per successione di funzioni (convergenza puntuale delle f_n e convergenza uniforme delle derivate) e quindi si ha $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) =$
$= \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$
$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, e la convergenza è uniforme perché $g_n'(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{\left(1 + n^2 x^2\right)^2}$, che si annulla in $x = \pm\frac{1}{n}$, quindi essendo
$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0$ si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \left|g_n\left(\pm\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; $g_n'(x) =$

$= \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \overset{n\to\infty}{\to} \chi_{\{0\}}$ ma la convergenza non è uniforme perché la funzione limite non è continua; $\left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)' = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} g_n'(x) = = \left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)' \Leftrightarrow x \neq 0$.

3. (a) $\dfrac{n\sin x\cos x}{n+x} \overset{n\to\infty}{\to} \sin x\cos x$ e la convergenza è uniforme in quanto $\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\dfrac{n\sin x\cos x}{n+x} - \sin x\cos x\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\sin x\cos x\left(\dfrac{n}{x+n}-1\right)\right| \leq$ $\leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\dfrac{n}{x+n}-1\right| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\dfrac{x}{x+n}\right| \leq \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x+n}\right| \leq \dfrac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; si può quindi applicare il teorema di passaggio al limite sotto integrale e dunque $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{n\sin x\cos x}{n+x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} \dfrac{n\sin x\cos x}{n+x}dx =$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2x)}{2}dx = \left[-\dfrac{\cos^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

(b) $\dfrac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2}dx \overset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{2+x^2}$ e la convergenza è uniforme su $\left[0,\sqrt{2}\right]$ infatti $\sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \left|\dfrac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2} - \dfrac{1}{2+x^2}\right| = \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \dfrac{\left|e^{\frac{x^2}{n}}-1\right|}{2+x^2} \leq \sup_{x\in\left[0,\sqrt{2}\right]} \dfrac{\left|e^{\frac{x^2}{n}}-1\right|}{2} =$ $= \dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$; applicando il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha che $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2}dx = \int_0^{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{x^2}{n}}}{2+x^2}dx =$ $= \int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{dx}{2+x^2} = \dfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \dfrac{dy}{1+y^2} =$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}[\arctan y]_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$.

(c) $\dfrac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la successione è equidominata su tutto $(0,+\infty)$ perché $\dfrac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx} \leq xe^{-nx^2} \leq xe^{-x^2}$; la convergenza è uniforme su tutti i compatti contenuti in $(0,+\infty)$ poiché $\sup_{x\in[\delta,M]} \left|\dfrac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}\right| \leq \sup_{x\in[\delta,M]} \left|xe^{-nx^2}\right| \leq Me^{-n\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi si può applicare il passaggio al limite sotto segno di integrale improprio: $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.

(d) $\dfrac{\sin(nx)}{n+x}dx \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la convergenza è uniforme in tutto l'intervallo $[0,+\infty)$ perché $\sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{\sin(nx)}{n+x}\right| \leq \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{1}{n+x}\right| \leq \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, ma la successione non è equidominata, quindi non è consentito scambiare

i segni di limite e integrale; tuttavia, integrando per parti si trova che $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n+x}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n(n+x)}\right]_0^{+\infty}-\right.$
$\left.-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=$
$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx$; la funzione $-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}$ tende uniformemente a 0 $\forall x\in[0,+\infty)$, perché $\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq$
$\leq\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq\frac{1}{n^3}\overset{n\to\infty}{\to}0$ e inoltre è equidominata in quanto $\left|\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}\right|\leq\frac{1}{n\left(n+x\right)^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$ e dunque questa volta si può passare al limite sotto il segno di integrale e si trova che
$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n+x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=$
$=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}-\frac{\cos(nx)}{n\left(n+x\right)^2}dx=\int_0^{+\infty}0dx=0.$

4. Sia f'_{n_k} una sottosuccessione di f'_n uniformemente convergente alla funzione g; essendo $f_n(0)$ limitata, ovviamente lo sarà anche $f_{n_k}(0)$ e quindi avrà una sottosuccessione $f_{n_{k_j}}(0)$ convergente ad un certo $l\in\mathbb{R}$. Ovviamente anche $f'_{n_{k_j}}$ convergerà uniformemente a g e quindi $\forall x\in[-1,1]$ si avrà $\lim_{j\to\infty}f_{n_{k_j}}(x)=\lim_{j\to\infty}\left(f_{n_{k_j}}(0)+\int_0^x f'_{n_{k_j}}(t)dt\right)=\lim_{j\to\infty}f_{n_{k_j}}(0)+$
$+\int_0^x\lim_{j\to\infty}f'_{n_{k_j}}(t)dt=l+\int_0^x g(t)dt=:f(x)$, dove lo scambio tra i segni di limite e di integrale è giustificato dall'uniforme convergenza di $f'_{n_{k_j}}$. La convergenza di $f_{n_{k_j}}$ è uniforme, perché $\sup_{x\in[-1,1]}|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|=$
$=\sup_{x\in[-1,1]}\left|f_{n_{k_j}}(0)+\int_0^x f'_{n_{k_j}}(t)dt-l-\int_0^x g(t)dt\right|\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+$
$+\sup_{x\in[-1,1]}\int_0^x|f'_{n_{k_j}}(t)-g(t)|dt\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+\int_{-1}^1|f'_{n_{k_j}}(t)-g(t)|dt\leq$
$\leq|f_{n_{k_j}}(0)-l|+2\sup_{x\in[-1,1]}|f'_{n_{k_j}}(x)-g(x)|$, dove entrambi i membri tendono a 0, il primo per la convergenza di $f_{n_{k_j}}(0)$ e il secondo per la convergenza uniforme di $f'_{n_{k_j}}$.