ESERCITAZIONE 5: APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Tiziana Raparelli

24/03/2009

1 CONOSCENZE PRELIMINARI

Definizione 1.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in \mathcal{C}^1(I)$ e sia $x_0 \in I$ fissato. Diciamo che f è convessa in I se*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I \quad .$$

f s dice concava se

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I \quad .$$

Proposizione 1.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Allora f è convessa se e solo se $f''(x) > 0$ e è concava se e solo se $f''(x) < 0$.*

Definizione 1.2. *I punti x_0 in cui $f''(x_0) = 0$ e $f''(x) < 0$ in un intorno sinistro [destro] di x_0 e $f''(x) > 0$ in un intorno destro [sinistro] di x_0 sono i punti in cui la funzione cambia di convessità: da convessa [concava] diventa concava [convessa].*
Tali punti si chiamano punti di flesso.

Lemma 1.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile in I. Allora $\exists$ la retta tangente al grafico di f in ogni punto $x_0 \in I$, la cui equazione è data da*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad .$$

Nei punti x_0 in cui $|f'(x_0)| = +\infty$ la retta tangente al grafico della funzione è la retta verticale di equazione $x = x_0$.

Osservazione 1.1. *$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f in x_0.*

Proposizione 1.2. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \quad .$$

Se esiste finito e diverso da 0 *il seguente limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

e se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$$

allora f *ammette asintoto obliquo per* $x \to +\infty$ *e i due limiti trovati sono rispettivamente il coefficiente angolare e il termine noto dell'asintoto. (Analogamente per* $x \to -\infty$*.)*

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Consideriamo $f(x) = |x|e^x$ nell'intervallo $[-5, 1]$.
(a) Determinare massimi e minimi (locali e assoluti) e intervalli di monotonia della funzione.
(b) Se ci sono punti di non derivabilità, studiare la loro natura.
(c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x_0 = -2$.
(d) Trovare eventuali punti di flesso e studiare la convessità della funzione.
(e) Tracciare un grafico qualitativo di f.

ESERCIZIO 2
Sia $f(x) = e^x + \sqrt[3]{x} - 1$. Dimostrare che f è invertibile su $\mathbb{R}$ e, detta $g = f^{-1}$, calcolare $g'(e)$.

ESERCIZIO 3
Sia $f(x) = \arctan x + x^3$.
(a) Discutere l'U.C. e la lipschitzianità di f nell'intervallo $[1, 3]$.
(b) Nel caso in cui f è lipschitziana nell'intervallo dato, determinare la costante di lipschitzianità.

ESERCIZIO 4

Dimostrare la seguente identità:

$$\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua nell'intervallo e derivabile due volte in (a, b). Sia $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(c) = f(b)$. Dimostrare che $\exists z \in (a, b)$ tale che $f''(z) = 0$.

ESERCIZIO 6

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|^3}{x^2}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Massimo e minimo assoluti di f sono da ricercarsi fra:

i) I valori che f assume agli estremi del dominio

$$f(-5) = \frac{5}{e^5} \quad , \quad f(1) = e \quad .$$

ii) I punti stazionari di f.

iii) I punti in cui f non è derivabile.

Per il punto ii) studiamo f'.

$$f'(x) = \text{sign}(x) e^x (1 + x)$$

e f' non è definita nello 0. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ e dallo studio del segno si vede che

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [-5, -1) \cup (0, 1].$$

Quindi f è strettamente crescente in tali intervalli (strettamente decrescente nei rimanenti), $x = -1$ è un punto di massimo locale e $f(-1) = \frac{1}{e}$. Anche $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale per f e $f(0) = 0$. Dato che $f(x) \geq 0 \quad \forall x$, segue che $x_0 = 0$ è anche punto di minimo assoluto della funzione. Confrontando il massimo locale di f ($\frac{1}{e}$) con i valori assunti da f agli estremi del dominio, concludiamo che il massimo assoluto di f è il numero

e, immagine del punto 1.
(b) Limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^\pm} \frac{|h|e^h}{h} = \pm 1$$

quindi 0 è un punto angoloso di f.
(c)

$$f(-2) = \frac{2}{e^2} \quad \text{e} \quad f'(-2) = e^{-2}$$

equazione della retta tangente in $x = -2$:

$$y = \frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} \quad .$$

(d)

$$f''(x) = e^x \text{sign}(x)(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

e

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-5, -2) \cup (0, 1]$$

dunque in tali intervalli la funzione è convessa, concava nei restanti e -2 e 0 sono punti di flesso.
(e)

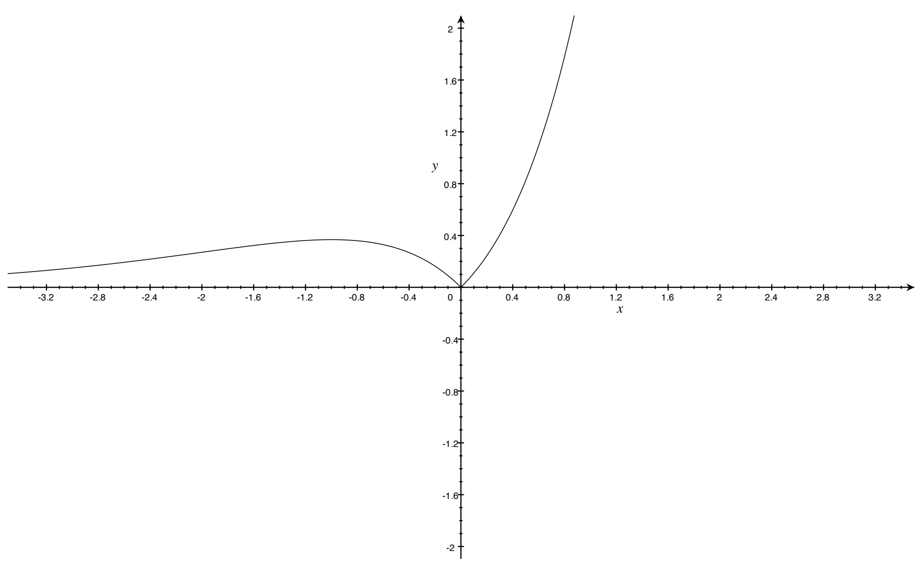

Figura 1: Il grafico di $y = |x|e^x$

ESERCIZIO 2

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

dunque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Inoltre f è invertibile nel suo dominio perché è somma di funzioni monotone crescenti. Quindi esiste $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Senza determinare g, calcoliamo $g'(e)$ (dopo aver trovato la controimmagine di e) applicando il teorema della derivata della funzione inversa. Poiché $g(e) = f^{-1}(e) = 1$, allora

$$g'(e) = \frac{1}{f'(1)} \quad .$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{e} \quad f'(1) = \frac{3e+1}{3} \quad ,$$

perciò

$$g'(e) = \frac{3}{3e+1} \quad .$$

ESERCIZIO 3

(a) $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 3]$, quindi per il teorema di Heine Cantor è U.C. Per la lipschitazianità calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2$$

e osserviamo che tale derivata esiste finita (perché continua su un compatto) in ogni punto dell'intervallo dato. Quindi f è derivabile in $[1, 3]$ e ciò implica che è lipschitziana.

(b) La costante L è il massimo assoluto di $|f'|$ in $[1, 3]$, ed essendo f' positiva e strettamente crescente, $L = f'(3) = \frac{271}{10}$.

ESERCIZIO 4

Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ Poiché

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$$

segue come conseguenza del teorema di Lagrange che f è costante negli intervalli del suo dominio. In particolare $f = c_1$ in $(0, +\infty)$ e $f = c_2$ in $(-\infty, 0)$ (in generale $c_1 \neq c_2$). Il valore di c_1 si determina dunque sostituendo ad x un qualsiasi punto dell'intervallo $(0, +\infty)$, o calcolando il limite per di f per $x \to 0^+$, o per $x \to +\infty$ (e analogamente per c_2.)

ESERCIZIO 5

Dimostrazione. Consideriamo l'intervallo $[a, c]$. Per ipotesi f è continua in $[a, c]$, derivabile in (a, c) e $f(a) = f(c)$. Dunque per il teorema di Rolle esiste $x_0 \in (a, c)$ t.c.

$$f'(x_0) = 0 \quad .$$

Stesse considerazioni in $[c, b]$, quindi esiste $x_1 \in (c, b)$ t.c.

$$f'(x_1) = 0 \quad .$$

Nell'intervallo $[x_0, x_1]$ f' soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, dunque esiste $z \in (x_0, x_1)$ t.c.

$$f''(z) = 0 \quad .$$

□

ESERCIZIO 6

(i) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) Intersezione con l'asse delle x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ($P = (-1, 0)$).

(iii) Studio del segno: $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.

(iv) Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

la retta $x = 0$ è asintoto verticale della funzione (da destra e da sinistra).

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 3$$

$y = x + 3$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Calcolando gli stessi limiti per $x \to -\infty$ si vede che $y = -x - 3$ è l'asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(v) Ricerca dei punti stazionari:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \mathrm{sign}(x+1)(x-2)}{x^3} \quad , \mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 0\} \quad .$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ e dallo studio del segno di f' segue che 2 è punto di minimo relativo (mentre -1 è il punto di minimo assoluto di f) e f decresce in $(-\infty, -1)$ e in $(0, 2)$ (cresce altrove).

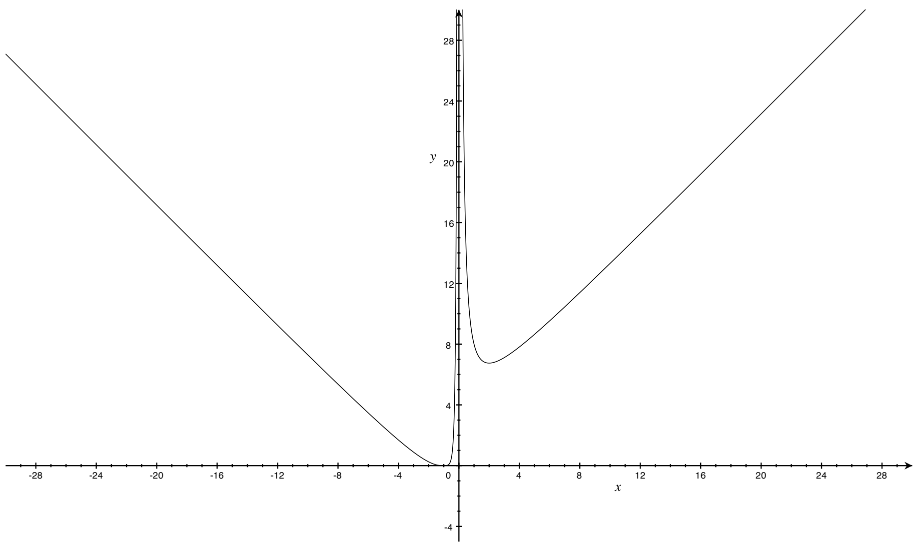

Figura 2: Il grafico di $y = \frac{|x^3+1|}{x^2}$