ESERCITAZIONE 9: INTEGRALI DEFINITI. CALCOLO DELLE AREE E ALTRE APPLICAZIONI

Tiziana Raparelli

05/05/2009

1 CONOSCENZE PRELIMINARI

Vogliamo calcolare
$$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad .$$

Se $a = 0$, allora basta porre $\sqrt{bx+c} = t$ e risolvere l'integrale indefinito in t con il metodo degli integrali fratti.

Se $a \neq 0$, allora distinguiamo tre casi:
1) Se $a > 0$ possiamo porre $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ (cioè potendo scegliere per il termine $\sqrt{a}x$ sia il segno $+$ sa il segno $-$ indifferentemente).
2) Se $c > 0$ possiamo porre $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + tx$.
3) Se $a < 0$ e $\Delta > 0$ e $x_{1,2}$ sono le due radici di $g(x)$, $x_1 < x_2$, possiamo porre
$$\sqrt{a\frac{x_2 - x}{x - x_1}} = t$$
Con ognuna di queste sostituzioni ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale.

Definizione 1.1. *La 1), la 2) e la 3) sono dette rispettivamente prima, seconda e terza sostituzione di Eulero.*

Calcolo delle aree
(1) L'area di una regione di piano delimitata dal grafico di una funzione continua $f(x)$ e l'asse delle x in un certo intervallo $[a, b]$ è data da
$$\int_a^b |f(x)|dx$$

Osservazione 1.1. *Se* $f(x) > 0$ *in* $[a, b]$, $Area(T) = \int_a^b f(x)dx$.

(2) L'area di una regione di piano compresa tra il grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe integrabili, è data da

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

dove a, b sono i punti di intersezione delle funzioni. In generale, date due funzioni integrabili f, g con $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a, b]$, la regione piana T delimitata dai loro grafici e dalle rette di equazione $x = a$, $x = b$ è la seguente:

$$T = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

e in tal caso si ha

$$A(T) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Sia $\Gamma(f)$ la regione di piano compresa tra la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$, l'asse delle x e le rette verticali di equazione $x = -1$ e $x = 1$. Calcolare l'area di $\Gamma(F)$.

ESERCIZIO 2
Calcolare l'area della regione piana compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

ESERCIZIO 3
(a) Calcolare

$$\int_0^1 \log \frac{x+2}{x+1} dx \quad .$$

(b) Dire se rappresenta l'area della regione S compresa tra $f(x) = \log \frac{x+2}{x+1}$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0, 1]$.

ESERCIZIO 4
Fra tutte le primitive di $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ determinare quella passante per il punto $P = (\log 2, -\frac{\pi}{2})$.

ESERCIZIO 5

(a) Per ogni numero reale $\alpha \neq 0$ calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{dx}{\alpha x\sqrt{1-\log^2 x}} \quad .$$

(b) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale dato sia uguale a 10.

ESERCIZIO 6

Sia $f(x)$ la funzione di Dirichlet nell'intervallo $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Consideriamo $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$. Dimostrare che $g(x)$ non è integrabile in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, mentre $|g(x)|$ lo è.

ESERCIZIO 7

(a) Calcolare

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \quad , \qquad \text{con} \qquad f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 + x^2 - 2}$$

(b) Dire se si tratta dell'area della regione compresa fra $f(x)$ e l'asse delle ascisse nell'intervallo dato, altrimenti calcolarla.

ESERCIZIO 8

Sia

$$F_n(x,\alpha) = \int x^n e^{\alpha x} dx \quad ,$$

con $\alpha \neq 0$.

(a) Dimostrare che vale la seguente formula ricorsiva

$$\begin{cases} F_0(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c \\ F_n(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha} x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} F_{n-1}(x,\alpha) \end{cases}$$

(b) Posto $c = 0$, usare la formula per calcolare l'area di T, dove T è la regione delimitata da $F_3(x,1)$ e l'asse delle x nell'intervallo $[-1,1]$.

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Poiché $f(x)$, dove è definita, è positiva, bisogna calcolare

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Possiamo riscrivere $f(x)$ come

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}} = \frac{1}{(x+3)\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}}$$

dunque porre

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$$

(terza sostituzione di Eulero), da cui

$$x = \frac{1-3t^2}{t^2+1} \quad , \quad dx = \frac{-8t}{(t^2+1)^2} \quad \text{e} \quad t_0 = 1, t_1 = 0 \quad .$$

Invertendo gli estremi di integrazione (e dunque cambiando di segno all'integrale) e svolgendo i calcoli, l'integrale dato risulta essere uguale a

$$2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} \quad .$$

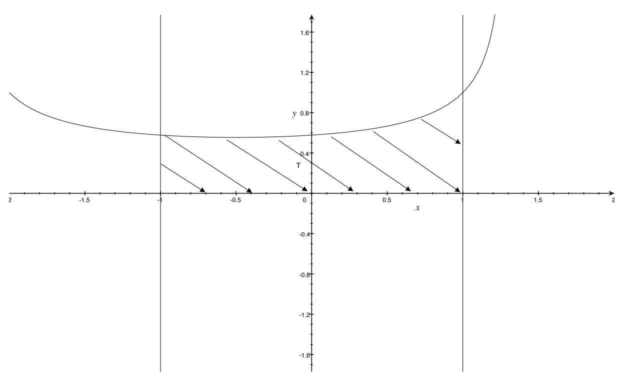

Figura 1: Il grafico di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}}$ in $[-1, 1]$

ESERCIZIO 2

Poiché $\cos x \geq \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, bisogna calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\Big)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\Big)dx \quad ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue poiché sono entrambe funzioni pari. Poniamo $t = \sin x$, da cui $\cos x dx = dt$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e l'integrale dato diventa

$$2\int_0^1 (1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})dt = 2t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \quad ,$$

e quest'ultimo lo risolviamo ponendo $u + t = \sqrt{1+t^2}$ (prima sostituzione di Eulero), cioè

$$t = \frac{1-u^2}{2u} \qquad dt = -\frac{u^2+1}{2u^2} \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = \sqrt{2} - 1$$

Perciò l'area della regione considerata è pari a

$$2\int_0^1 (1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})dt = 2 - 2\int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{1}{u}du = 2 + 2\log(\sqrt{2}-1) \quad .$$

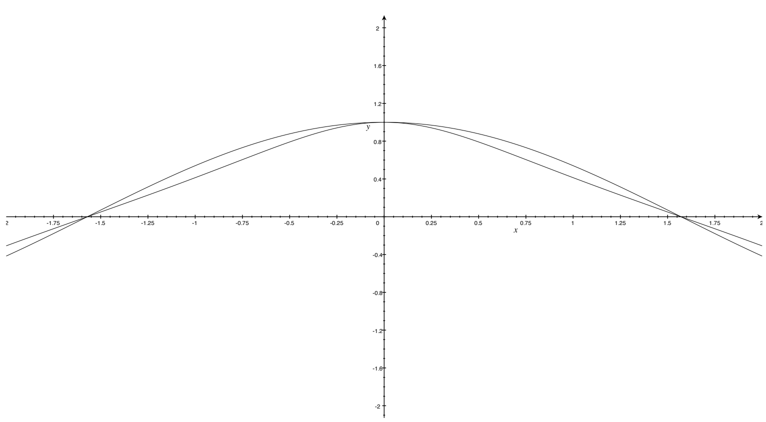

Figura 2: I grafici di $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

ESERCIZIO 3

(a) Per parti, $f = 1, g = \log \frac{x+2}{x+1}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \log \frac{x+2}{x+1} dx &= x \log \frac{x+2}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-x}{(x+1)(x+2)} dx \\
= \log \frac{3}{2} &+ 2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)}) \\
= \log \frac{3}{2} &+ 2 \log(x+2)\Big|_0^1 - \log(x+1)\Big|_0^1 \\
= \log \frac{3}{2} &+ 2 \log \frac{3}{2} - \log 2 = \log \frac{27}{16} \quad .
\end{aligned}
$$

(b) Sì, perché $f(x)$ è maggiore di 0 nell'intervallo dato.

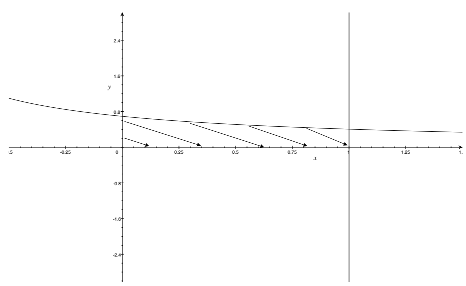

Figura 3: La regione S

ESERCIZIO 4

Ponendo $t = \sqrt{e^x - 1}$, $dx = \frac{2t}{t^2+1}$,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\
= \quad 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + c \quad .
\end{aligned}
$$

Per determinare c, richiedo che $F(\log 2) = -\frac{\pi}{2}$

$$2\sqrt{2-1} - 2 \arctan \sqrt{2-1} + c = -\frac{\pi}{2}$$

da cui $c = -2$.

ESERCIZIO 5

(a) Con la sosituzione $t = \log x$,

$$F_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\log 2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\alpha}\arcsin t\Big|_0^{\log 2} = \frac{1}{\alpha}\arcsin(\log 2) \quad .$$

(b)

$$F_\alpha(x) = 10 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{10}{\arcsin(\log 2)} \quad .$$

ESERCIZIO 6

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Sia $-\frac{1}{2} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \frac{1}{2}$ una qualsiasi suddivisione di $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Per ogni $k < n$ nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia numeri razionali, sia irrazionali, dunque si ha

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x) = -\frac{1}{2} \qquad \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x) = \frac{1}{2}$$

cioè ogni somma integrale inferiore è pari a $-\frac{1}{2}$ ed ogni somma integrale superiore è pari a $\frac{1}{2}$.
Invece $|g(x)| = \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, dunque $|g|$ è integrabile e

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g(x)|dx = \frac{1}{2} \quad .$$

ESERCIZIO 7

(a) Si osserva che $f(x)$ è dispari, dunque il suo integrale in ogni intervallo del tipo $[-a, a]$ è nullo, perciò non può essere l'area richiesta.

(b) Sia T la regione di cui vogliamo calcolare l'area.

$$A(T) = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$

l'ultima uguaglianza essendo vera poiché f è dispari. Dato che

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2+2)(x^2-1)$$

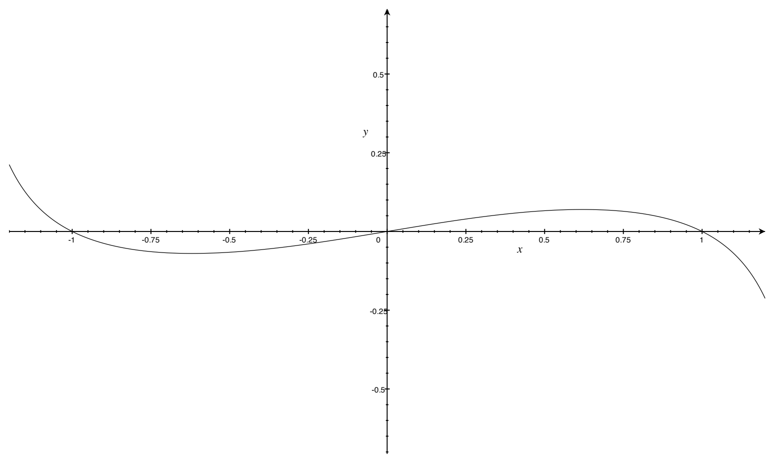

Figura 4: Il grafico di $f(x) = \frac{x^3-x}{x^4+x^2-6}$

allora

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

e

$$A(T) = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2} = \log(x^2+2)\Big|_0^1 = \log\frac{3}{2} \quad .$$

ESERCIZIO 8

(a)

$$F_0(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c \quad ,$$

per parti, con $f(x) = e^{\alpha x}, g(x) = x^n$, si ottiene

$$\begin{aligned} F_n(x,\alpha) &= \frac{1}{\alpha}x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha}\int x^{n-1}e^{\alpha x}dx \\ &= \frac{1}{\alpha}x^n e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha}F_{n-1}(x,\alpha) \quad . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} F_2(x,1) &= (x^2-2x+2)e^x + c \\ F_3(x,1) &= (x^3-3x^2+6x-6)e^x + c \end{aligned}$$

Ora, ponendo $c = 0$, $F_3(-1) = -16$ e $F_3(1) = -2$. Inoltre la derivata di $F_3(x,1)$ è la funzione $h(x) = x^3e^x$ e dallo studio del suo segno si evince che

$F_3(x,1) < 0$ in tutto l'intervallo dato. Dunque

$$A(T) = \int_{-1}^{1} |F_3(x,1)| dx = -\int_{-1}^{1} F_3(x,1) dx = -e^x(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)\Big|_{-1}^{1} = \frac{11e^2 - 29}{e}$$

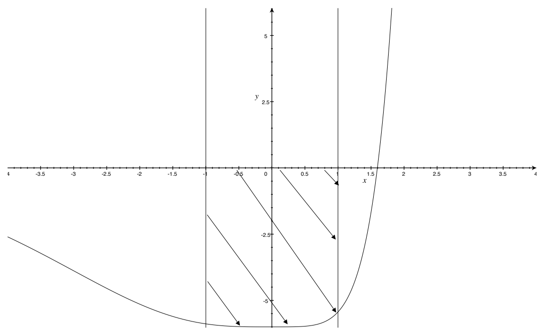

Figura 5: La regione T