ESERCITAZIONE 8: INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI

Tiziana Raparelli

28/04/2009

1 CONOSCENZE PRELIMINARI

Formule parametriche per le funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \text{dove } t &= \tan\frac{x}{2} \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2} dx \\ &\text{(b)} \int_5^{12} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} dx \\ &\text{(c)} \int_1^e \frac{dx}{x + x\log^2 x} \\ &\text{(d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} \quad . \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

Per ognuna delle seguenti funzioni trovare l'insieme delle primitive.

$$f(x) = \frac{x^5+4x+2}{x^3+x^2}$$
$$g(x) = \frac{1}{e^{2x}+2e^x+3}$$
$$h(x) = \sqrt{a^2-x^2} \quad .$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

(a) Sia $t = \cos x$. Allora $dt = -\sin x dx$ e gli estremi diventano $t_0 = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2} dx &= -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{dt}{t^2-3t+2} \\ &= +\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2-3t+2} \end{aligned}$$

Quest'ultimo si sa calcolare perché la funzione integranda è una funzione razionale. Troviamo le radici del denominatore:

$$t^2-3t+2=0 \Longleftrightarrow t_1=1, t_2=2$$

quindi

$$t^2-3t+2 = (t-1)(t-2)$$

determiniamo dunque $A, B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$$

cioè

$$At - 2A + Bt - B = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

da cui $A=-1$, $B=1$ e l'integrale dato è equivalente a

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{t-2} dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{t-1} dt = \left[\log\left|\frac{t-2}{t-1}\right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}) - \log(2) = \log(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-2}) \quad .$$

(b) Poniamo $t = \sqrt{x+4}$, da cui $x = t^2 - 4$ e $dx = 2tdt$. Estremi: $t_0 = \sqrt{5+4} = 3$ e $t_1 = \sqrt{12+4} = 4$. Perciò

$$\int_5^{12} \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx = 2\int_3^4 \frac{1}{t^2-4}dt \quad = \quad \frac{1}{2}(\int_3^4 \frac{dt}{t-2} - \int_3^4 \frac{dt}{t+2})$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4 \quad = \quad \frac{1}{2}\log\frac{5}{3} \quad .$$

(c) Sia $t = \log x$, quindi $x = e^t$, $dx = e^t dt$ e $t_0 = 0, t_1 = 1$. L'integrale dato è equivalente a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4} \quad .$$

(d) Si pone $t = \tan\frac{x}{2}$, (dunque $x = 2\arctan x$, $dx = \frac{2}{1+t^2}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$) e si utilizzano le formule (1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} \quad = \quad \int_0^1 \frac{2}{-4t^2+6t+4}dt = \int_0^1 \frac{1}{-2(t-2)(t+\frac{1}{2})}dt$$
$$= -\frac{1}{5}(\int_0^1 \frac{1}{t-2}dt - \int \frac{2}{2t+1}dt) \quad = \quad \frac{1}{5}\left[\log\left|\frac{2t+1}{t-2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{5}\log 6 \quad .$$

ESERCIZIO 2

Sia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Dato che il grado di p è maggiore del grado di q, si divide p per q, ottenendo

$$x^5 + 4x + 2 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2) + r(x), \quad \text{con} \quad r(x) = -x^2 + 4x + 2 \quad ,$$

e dividendo entrambi i lati per $x^3 + x^2$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)} = \int (x^2 - x + 1)dx + \int \frac{-x^2+4x+2}{x^2(x+1)}dx$$

Il denominatore ha due radici, $x_0 = 1$ con molteplicità semplice e $x_1 = 0$ con molteplicità doppia, quindi cerco $A, B, C \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{-x^2+4x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \iff \begin{cases} A + B = -1 \\ C - B = 4 \\ -C = 2 \end{cases}$$

da cui $A = 5, B = -6, C = -2$ e l'integrale dato è pari a

$$\int x^2 dx - \int x dx + \int dx + 5\int \frac{1}{x-1}dx - 6\int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 5\log|x-1| - 6\log|x| + \frac{2}{x} + c \quad .$$

Per determinare l'insieme delle primitive di $g(x)$, poniamo $e^x = t$ (dunque $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$), perciò

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{(t^2+2t+3)t}dt$$

Il denominatore è un polinomio di terzo grado che in $\mathbb{R}$ ammette solo la radice $t = 0$. Per integrare la funzione data cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{(t^2+2t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+3} \iff \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 3A=1 \end{cases}$$

risolto per $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\Big(\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{t+2}{t^2+2+3}dt\Big) &= \frac{1}{3}\Big(\log|t| - \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+3}dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{t^2+2t+3}dt\Big) = \\ \Bigg[\frac{1}{3}\log|t| - \frac{1}{6}\log|t^2+2t+3| &- \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)^2+2}dt\Bigg]_{t=e^x} = \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\log|e^{2x}+2e^x+3| &- \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan(\frac{e^x+1}{\sqrt{2}}) + c \quad . \end{aligned}$$

Per calcolare $\int h(x)dx$ si effettua la sostituzione $x = a\sin t$, da cui $dx = a\cos t dt$ e

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a^2\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + c$$

(per l'ultima uguaglianza avendo integrato due volte per parti). Per tornare alla variabile x si tenga conto che

$$\begin{aligned} \sin t &= \frac{x}{a} \\ t &= \arcsin(\frac{x}{a}) \\ \cos t &= \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} \\ \Rightarrow \qquad & \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}) + \frac{a}{2}(x + \sqrt{a^2-x^2}) + c \quad . \end{aligned}$$