ESERCITAZIONE 7: METODI DI INTEGRAZIONE

Tiziana Raparelli

21/04/2009

1 CONOSCENZE PRELIMINARI

Lemma 1.1 (Integrazione per parti)**.** *Siano* $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$*. Allora*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \quad ,$$

dove $F(x)$ *è una primitiva di* $f(x)$*.*

Dimostrazione. Segue dalla regole di derivazione del prodotto di due funzioni, poiché in $[a,b]$

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)g(x)dx\right) = f(x)g(x)$$

e

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx\right) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) - F(x)g'(x) = f(x)g(x) \quad .$$

□

Lemma 1.2 (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia* $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *e* ϕ *una funzione invertibile* $\in \mathcal{C}^1([c,d])$*, dove* $\phi([c,d]) = [a,b]$*. Allora*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)dx \quad ,$$

con $\alpha = \phi^{-1}(a)$*,* $\beta = \phi^{-1}(b)$*.*

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f in $[a,b]$, e siano $\alpha = \phi^{-1}(a)$ e $\beta = \phi^{-1}(b)$. Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha che

$$\frac{d}{dx}\big(F(\phi(x))\big) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) \quad \forall x \in [c,d]$$

cioè $F(\phi(x))$ è una primitiva di $f(\phi(x))\phi'(x)$ in $[c,d]$, da cui segue

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x))\Big|_\alpha^\beta = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad .$$

□

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Calcolare gli integrali indicati di seguito.
(a) $\int x \log x dx$
(b) $\int \arctan x dx$
(c) $\int \tan x dx$
(d) $\int e^{-x}(x^2+1)dx$
(e) $\int e^x \cos x dx$
(f) $\int \cos^2 x dx$
(g) $\int \sin^3 x dx$
(h) $\int \cos x e^{2\sin x} dx$
(i) $\int \frac{\log x + \log^2 x}{x} dx$
(j) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$
(k) $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$
(l) $\int (\sin x)^n \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N}$
(m) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$
(n) $\int \frac{1}{k+x^2}, \quad k > 0.$

3 SOLUZIONI

(a) Per parti, $f = x, g = \log x$:

$$\int x \log x dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2}) + c$$

(b) Per parti, $f = 1, g = \arctan x$:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x + \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

avendo utilizzato

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c \tag{1}$$

(c) Immediato, segue da (1):

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \log |\cos x|^{-1} + c$$

(d)Due volte per parti. La prima $f = e^{-x}, g = x^2 + 1$,
la seconda $f = e^{-x}, g = x$

$$\int e^{-x}(x^2+1)dx = -e^{-x}(x^2+2x+3) + c$$

(e) Due volte per parti. La prima $f = e^x, g = \cos x$,
la seconda $f = e^x, g = \sin x$:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx$$

da cui

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + c$$

(f) Per parti, $f = g = \cos x$:

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

da cui

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$$

(g)

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\cos x + \int \cos^2 x(-\sin x) dx \quad .$$

Per sostituzione, ponendo $\cos x = t$, segue che $dt (= d(\cos x)) = -\sin x dx$ e dunque

$$\int \cos^2 x(-\sin x) dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\cos^3 x}{3} + c \quad .$$

(h) Immediato, ricordando che

$$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c \tag{2}$$

con $f = 2\sin x$

$$\frac{1}{2}\int 2\cos x e^{2\sin x}dx = \frac{1}{2}e^{2\sin x} + c$$

(i)

$$\int \frac{\log x}{x}dx + \int \frac{\log^2 x}{x}dx = \frac{\log^2 x}{2} + \frac{\log^3 x}{3} + c$$

avendo utilizzato

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c \tag{3}$$

per $n = 1, 2$.
(j) Con la sostituzione $\cos x = t \Rightarrow dt = -\sin x dx$ e

$$-\int \frac{-\sin x dx}{2+\cos x} = -\int \frac{dt}{2+t} = -\log|2+t| + c = \log\frac{1}{2+\cos x} + c$$

(k) Con la sostituzione $\log x = t \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$ e

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos t dt = \sin(\log x) + c$$

(l) Con la sostituzione $\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x dx$ e

$$\int (\sin x)^n \cos x dx = \int t^n dt = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c$$

(m)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x\cos x}dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}dx \\ = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx &= \log|\cos x|^{-1} + \log|\sin x| + c\end{aligned}$$

(n)

$$\int \frac{1}{k+x^2}dx = \frac{1}{k}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{k}})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

con il cambio di variabile $t = \frac{x}{\sqrt{k}}(\Rightarrow x = \sqrt{k}t$ e $dx = \sqrt{k}dt)$. Perciò

$$\int \frac{1}{k+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{k}}) + c \quad .$$