ESERCITAZIONE 10: INTEGRALI DEFINITI, POLINOMIO DI TAYLOR E TEOREMA DI DE L'HOPITAL

Tiziana Raparelli

12/05/2009

1 Conoscenze preliminari

Alcuni sviluppi di Mac Laurin notevoli: (formula di Taylor con resto di Peano centrata in 0)

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_0^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= \sum_1^n (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
\sin x &= \sum_0^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= \sum_0^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\
\arctan x &= \sum_0^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_0^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)
\end{aligned}
$$

Lemma 1.1. *Se $p_1(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 di $f(x)$ e $p_2(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 di $g(x)$,* *allora*

$$p_T(f+g)(x) = p_1(x) + p_2(x) \tag{1}$$

$$p_T(fg)(x) = p_1(x)p_2(x) \tag{2}$$

Lemma 1.2. *Sia*

$$p_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

il polinomio di Taylor di $f(x)$ centrato in x_0 di ordine n. Allora
i) Il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ centrato in x_0 di $f'(x)$ è

$$p_T\big(f'(x)\big) = p'_T(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} \quad . \tag{3}$$

ii) Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$. Allora il polinomio di Taylor di grado $n+1$ centrato in x_0 di $F(x)$ è dato da

$$p_T\big(F(x)\big) = \int p_T((f(x))dx = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \tag{4}$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Calcolare l'area di R dove R è la regione di area maggiore compresa tra la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ e la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

ESERCIZIO 2
Calcolare i seguenti limiti

$$\text{(a)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} \log(1+\sin t)dt$$

$$\text{(c)} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

ESERCIZIO 3
Scrivere i polinomi di Taylor di ordine n delle seguenti funzioni, in un intorno

del punto indicato.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a)} & f(x) = x\cos(x^2) & x_0 = 0 \\
\text{(b)} & f(x) = \sqrt[3]{x} & x_0 = 1 \\
\text{(c)} & f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} & x_0 = 0 \\
\text{(d)} & f(x) = \arctan x & x_0 = 0 \quad .
\end{array}
$$

ESERCIZIO 4

Sia f una funzione limitata e integrabile nell'intervallo $[0,5]$ tale che

$$\int_0^5 f(x)dx = 10 \quad .$$

Dimostrare che:
a) esiste almeno un punto $x_0 \in [0,5]$ t.c. $f(x_0) < 3$
b) se $f(x) \in C^0([0,5])$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in [0,5]$ t.c.

$$f(x_0) = 2 \quad .$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

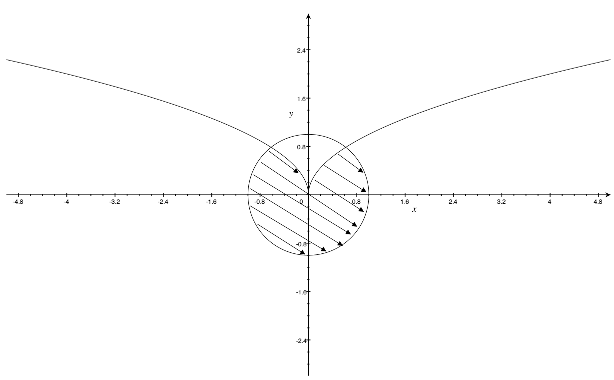

Figura 1: La regione R

Sia S l'altra regione delimitata dai grafici delle curve date. È conveniente calcolare l'area di S e sottrarla all'area del cerchio unitario. La semicirconferenza superiore descritta dall'equazione

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

e l'intersezione con $f(x)$, per $x > 0$, è la soluzione (positiva) del sistema

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x}$$

cioè è il punto $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Poiché entrambe le funzioni sono pari, l'area cercata è pari a

$$\begin{aligned}
A(S) &= 2\int_0^a \big(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x}\big)dx \\
=|_{x=\sin t} &\quad 2\Big(\int_0^{\arcsin a} \cos^2 t dt - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\Big) \\
&= \big[\sin t \cos t + t\big]_0^{\arcsin a} - \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} \\
&= 2a\cos(\arcsin a) + \arcsin a - \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} \\
&= 2a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a - \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} \quad .
\end{aligned}$$

Dunque l'area della regione cercata è

$$A(R) = \pi - A(S) \quad .$$

ESERCIZIO 2

(a) È una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale e il teorema di De l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x (e^{t^2}-1)dt = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \frac{1}{3} \quad .$$

(b) Come nel caso (a) ,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} \log(1+\sin t)dt &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x^2)2x}{4x^3} \\
= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\frac{2x\sin x^2}{4x^3} &= \frac{1}{2} \quad .
\end{aligned}$$

(c) Forma indeterminata $[1^\infty]$

$$\sin x^{\frac{1}{\cos^2 x}} = e^{\frac{1}{\cos^2 x}\log(\sin x)} \quad ,$$

e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\log(\sin x) = [\frac{0}{0}] \quad .$$

Applicando il teorema di De L'Hopital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot (-\frac{1}{2\cos x \sin x}) \quad ,$$

quindi il limite dato à pari a $e^{-\frac{1}{2}}$.

ESERCIZIO 3

(a) Considerando il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 di $\cos t$ e sostituendo $t \to x^2$, si ha che

$$p_T(\cos x^2) = \sum_{k\to 0}^{n} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$$

e

$$p_T(x \cos x^2) = \sum_{k\to 0}^{n} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(2k)!}$$

avendo usato (2) .

(b) Sia $y = x - 1$, allora $f(y) = (1+y)^{\frac{1}{3}}$ e $y_0 = 0$. Usando la formula di Mac Laurin di $(1+y)^{\alpha}$, con $\alpha = \frac{1}{3}$, otteniamo che

$$p_T(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{3} \dots (-\frac{2}{3} - k)}{k!} y^k$$

e, ritornando alla variabile x, abbiamo l'espressione per il polinomio cercato:

$$p_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{3} \dots (-\frac{2}{3} - k)}{k!} (x-1)^k \quad .$$

(c) Dato che

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

calcoliamo il polinomio di Taylor centrato in 0 di $(1+x^2)^{-1}$e poi lo moltiplichiamo per x.

$$p\big((1+x^2)^{-1}\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)\dots -k}{k!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$

e

$$p(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k+1} \quad .$$

(d) Poiché $\arctan x$ è una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ (e $\arctan(0) = 0$), allora usando il lemma 1.2 si ottiene il polinomio di Taylor dell'$\arctan x$ integrando termine a termine il polinomio di Taylor di $\frac{1}{1+x^2}$, cioè

$$p_T(\arctan x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad .$$

ESERCIZIO 4

a) Supp. per assurdo $f(x) \geq 3$ per ogni $x \in [0,5]$, allora risulterebbe

$$\int_0^5 f(x)dx \geq \int_0^5 3dx = 15 \quad .$$

b) Per il teorema della media, essendo f continua, esiste $x_0 \in [0,5]$ t.c.

$$10 = \int_0^5 f(x)dx = 5f(x_0)$$

da cui segue la tesi.