ESERCITAZIONE 3: APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI ROLLE E DI LAGRANGE

Tiziana Raparelli

17/03/2009

1 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Sia f la funzione definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è derivabile in 0 e f' non è continua in 0, ($\Leftrightarrow$ f è derivabile in 0, ma non è $\mathcal{C}^1(\{0\})$).

ESERCIZIO 2
Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + \sqrt{x^2+5} & \text{se } x \leq 2 \\ b\log(x-1) + 2a & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3
Discutere l'uniforme continuità di $f(x) = \log(1+x)$ in $[4, +\infty)$ e in tutto il suo dominio.

ESERCIZIO 4
Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\sin x = x - 1 \quad .$$

ESERCIZIO 5
Dimostrare la seguente disuguaglianza

$$x^2 \leq e^x - 1 \quad , \quad \forall x \geq 0 \quad .$$

ESERCIZIO 6
Dimostrare che la seguente disuguaglianza

$$e^x > \sin x + \cos x$$

è vera nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2}]$.
ESERCIZIO 7
Dimostrare che il polinomio $x^n + rx + q$ $(r, q \in \mathbb{R})$ ha al più due radici reali se n è pari e se n è dispari ne ha al più tre.

ESERCIZIO 8
Determinare i punti di massimo e di minimo (relativo ed assoluto) e gli intervalli di monotonia di $f(x) = x \log^2 x$.

2 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolando

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

si vede che la funzione è continua. Si studia poi il limite del rapporto incrementale in 0 e, poiché viene un valore finito, f è anche derivabile. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

e

$$\lim_{x \to 0} f'(x) \quad \nexists$$

perciò $f \notin \mathcal{C}^1(\{0\})$.

ESERCIZIO 2
Per la continità (in $x = 2$) deve essere

$$\lim_{x \to 2^-} (2ax^2 + \sqrt{x^2 + 5}) = \lim_{x \to 2^+} (b \log(x - 1) + 2a)$$

cioè $a = -\frac{1}{2}$, $b \in \mathbb{R}$. Per la derivabilità, dopo avere sostituito ad a il valore $-\frac{1}{2}$, si uguagliano limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale di f nel punto 2, ottenendo che f è derivabile per $b = -\frac{10}{3}$ (e $a = -\frac{1}{2}$).

ESERCIZIO 3

La derivata di $\log(1+x)$ è $\frac{1}{1+x}$ che è finita per ogni x nell'intervallo $[4, +\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

ciò implica che $\log(1+x)$ è lipschitziana nell'intervallo dato e quindi anche U.C.

Non è così in tutto il suo dominio $= (-1, +\infty)$, infatti

$$\lim_{x\to-1^+} \log \frac{1}{1+x} = -\infty$$

quindi f non è U.C.

ESERCIZIO 4

Significa vedere quante radici ha l'equazione $f(x) = 1$, dove

$$f(x) = x - \sin x \quad .$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, essendo f continua, esiste almeno un punto c tale che $f(c) = 1$ (teorema dei valori intermedi).

Ora, osserviamo innanzi tutto che per ogni $x < 0$ segue $f(x) < 1$ e per ogni $x > 2$, $f(x) > 1$. Quindi le radici dell'equazione sono da cercarsi nell'intervallo $[0, 2]$.

Studiamo la derivata prima:

$f'(x) = 1 - \cos x$ e $f'(x) = 0$ quando $x = 2k\pi$, mentre $f'(x) > 0$ $\forall x \neq 2k\pi$.

Quindi f è strettamente crescente nel suo dominio, essendo $f(0) = 0 (< 1)$ e $f(2) = 2 - \sin(2) (> 1)$, esiste un unico $x \in (0, 2)$ tale che $f(x) = 1$.

Osservazione 2.1. *I punti della forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso per f, cioè punti in cui la funzione cambia di convessità.*

ESERCIZIO 5

Sia $f(x) = e^x - x^2 - 1$, dobbiamo dimostrare che $\forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$.

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^x - 2x \quad \text{e} \quad f''(x) = e^x - 2 \quad .$$

Ora,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log 2 \quad \text{e} \quad f''x \geq 0 \quad \forall x \geq \log 2$$

quindi $\log 2$ è punto di minimo locale per f' e

$$f'(\log 2) = 2(1 - \log 2) > 0 \quad .$$

Inoltre è anche un minimo assoluto (nell'intervallo considerato) per f' perché $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Perciò $f'(x) > 0$ in $[0, +\infty)$ e quindi f è strettamente crescente nell'intervallo dato. Poiché $f(0) = 0$ abbiamo la tesi.

ESERCIZIO 6

Sia $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, vogliamo dimostrare che $f(x) > 0$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Osserviamo per prima cosa che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0$. Studiamo le derivate prima e seconda:

$$f'(x) = e^x - \cos x + \sin x$$

e

$$f''(x) = e^x + \sin x + \cos x.$$

Ora, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$, risulta $f''(x) > 0$ e questo si riflette sulla monotonia di $f'(x)$: $f'(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

perciò $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, e questo implica che anche f è strettamente crescente nell'intervallo. Visto il valore del limite destro in 0, segue che f è strettamente positiva in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

ESERCIZIO 7

(1) Supp. $n = 2k$. Allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^n + rx + q) = +\infty \quad .$$

$$p'(x) = nx^{n-1} + r \qquad \text{e} \qquad p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n-1]{-\frac{r}{n}} := x_0 \quad .$$

Dato che $n - 1$ è dispari, $p'(x)$ ha un'unica radice, che è un punto di minimo (locale e assoluto) per $p(x)$. A seconda del segno di $p(x_0)$, il polinomio dato avrà 0 radici (se $p(x_0) > 0$), una radice (se $p(x_0)$=0), o 2 radici (se $p(x_0) < 0$).

(2) Supp. $n = 2k + 1$. Allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty \quad .$$

In questo caso $n-1$ è pari, quindi

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n-1]{-\frac{r}{n}} := \pm x_0 \quad .$$

Se $r > 0$ il radicando è negativo, e $p' \geq 0 \quad \forall x$, quindi $p(x)$ è strettamente crescente, quindi ha un'unica radice. Anche se $r = 0$ ho un'unica radice perché il punto $x = 0$ è un flesso per $p(x)$ e $p(x)$ è strettamente crescente. Se $r < 0$ esistono due punti (uno positivo e l'altro negativo) in cui si annulla $p'(x)$, che sono uno di minimo locale, l'altro di massimo locale per $p(x)$ e a seconda del segno di $p(\pm x_0)$ il polinomio dato avrà una o tre radici.

ESERCIZIO 8

$$Dom(f) = (0, +\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} = +\infty \quad .$$

Quindi $\sup(f) = +\infty$ (e f non può avere massimi assoluti).
Ricerca dei punti stazionari:

$$f'(x) = \log x(\log x + 2) \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad x = e^{-2}.$$

Studio del segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x > 1 \text{ e } \forall x < e^{-2}$$

Quindi 1 è punto di minimo locale per f e e^{-2} è punto di massimo locale.

$$f(e^-2) = 4e^{-2}$$

e dato che

$$f(1) = 0 = \min(f)$$

cioè 1 è anche punto di minimo assoluto per f.