Cognome e nome ____________________

APPELLO X AM1C
17 SETTEMBRE 2009

Esercizio 1.
Sia
$$f(x) = x \arctan x + \log(\sqrt{1+x^2})$$
(a) Determinarne: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, eventuali massimi, minimi e punti di flesso, intervalli di convessità. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Studiare l'uniforme continuità di f.
(c) Calcolare l'area del sottografico di f nell'intervallo $[-1, 1]$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO X AM1C
17 SETTEMBRE 2009

Esercizio 2.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^{\frac{1}{x(e^x-1)}} \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO X AM1C
17 SETTEMBRE 2009

Esercizio 3.
(a) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Dimostrare che la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

definita $\forall x \in [a, b]$ è lipschitziana.
(b) Fra tutte le primitive di

$$f(x) = \tan x \log(\cos x)$$

determinare quella che passa per il punto P di coordinate $(2\pi, 1)$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO X AM1C
17 SETTEMBRE 2009

Esercizio 4.
Sia
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1} \quad .$$
Determinare il numero delle radici di $f(x)$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO X AM1C
17 SETTEMBRE 2009

Esercizio 5.
(a) Sia data la seguente funzione:

$$f_\alpha(x) = \frac{\arctan(x^3)}{x^2} + \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \quad .$$

Discutere la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx \quad .$$

(b) Posto $\alpha = 3$, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_2^{\sqrt{x}} f_\alpha(t)dt \quad .$$

1 Soluzioni

Esercizio 1

(a)

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e $f(-x) = f(x)$, cioè f è pari. Studio di f per $x \in [0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \nexists \text{ asintoto orizzontale} \quad .$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

ma

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \frac{\pi}{2}x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\sqrt{1+x^2}) = +\infty \quad ,$$

quindi la funzione non ammette asintoti obliqui.

Intervalli di monotonia, studio di massimi e minimi locali:

$$f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, perciò $x = 0$ è un punto di minimo relativo (e assoluto) ($\mathrm{Dom} f' = \mathbb{R}$).

Intervalli di convessità:

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

e f è convessa in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

(b) Poiché f ammette derivata su tutto $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm\frac{\pi}{2}$, segue che è uniformemente continua (perché derivabile con derivata limitata).

(c) Sia Γ la regione data. Dato che f è una funzione pari ed è positiva, l'area cercata è data dall'integrale seguente

$$2\int_0^1 (x\arctan x + \frac{1}{2}\log(1+x^2))dx$$

che si risolve per parti:

$$\begin{aligned}
& 2\int f(x)dx = \\
= \ & 2\Big[\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}x\log(1+x^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx\Big] \\
= \ & 2\Big(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \log 2 - \log(x^2+1)\Big|_0^1)\Big) \\
= \ & \frac{\pi}{2} - 1 + \log 4 \quad .
\end{aligned}$$

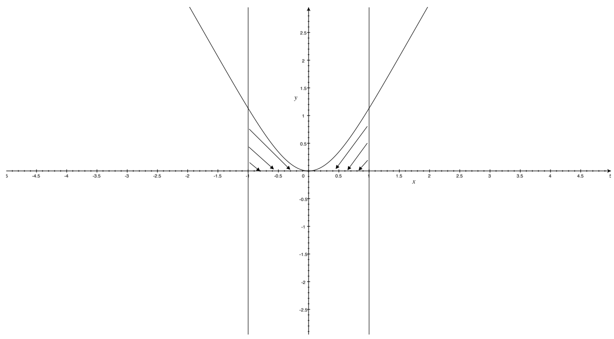

Figura 1: Il grafico di $y = x\arctan x + \log(\sqrt{1+x^2})$ e la regione Γ

Esercizio 2

È una forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$. Dato che

$$\frac{3x}{\sin(3x)}^{\frac{1}{x(e^x-1)}} = e^{\frac{1}{x(e^x-1)}\log\frac{3x}{\sin(3x)}}$$

studiamo il limite dell'esponente.

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(e^x-1)} \log \frac{3x}{\sin(3x)} = [\frac{0}{0}] \\ = & \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin(3x) - 9x\cos(3x)}{(e^x - 1 + xe^x)3x\sin 3x} \end{aligned}$$

per il teorema di De L'Hopital. Sviluppando con Taylor le funzioni presenti si ha che il limite dato è pari al seguente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{9x - \frac{81}{3!}x^3 - 9x + \frac{81}{2}x^3 + o(x^4)}{2x\cdot 3x \cdot 3x + o(x^2)} = \frac{3}{2} \quad .$$

Il limite dato è dunque pari a $e^{\frac{3}{2}}$.

Esercizio 3

(a)

Bisogna dimostrare che presi comunque $x, y \in [a, b]$ esiste $M > 0$ t.c.

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

Supponiamo $x < y$. Per definizione di funzione integrale valgono le seguenti uguaglianze

$$|F(x) - F(y)| = |\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt| = |\int_x^y f(t)dt| \quad .$$

f integrabile sul compatto $[a, b]$, significa f limitata in $[a, b]$, dunque esiste $M > 0$ t.c.

$$|\int_x^y f(t)dt| \leq M|x - y|$$

c.v.d.

(b)

Con la sostituzione $t = \cos x$ si ha che $dt = -\frac{\sin}{x}dx$ e dunque l'insieme delle primitive della funzione data è

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \log(\cos x) dx = -\int \frac{\log t}{t} dt = -\frac{1}{2}\log^2(\cos x) + c \quad .$$

La primitiva richiesta è la funzione tale che

$$F(2\pi) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 \quad .$$

Esercizio 4

Sia $f(x) = f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}$. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

e f è continua, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$. Per eventuali altre intersezioni con l'asse delle x studiamo i punti stazionari di f.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 1}{3(x^3 + 2x^2 + x + 1)^{\frac{2}{3}}} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{3} \quad .$$

f è crescente in $(-\infty, -1)$, decresce in $[-1, -\frac{1}{3}]$ e cresce in $(-\frac{1}{3}, +\infty)$, dunque f ha un minimo locale nel punto $x_2 = -\frac{1}{3}$ e $f(-\frac{1}{3}) = \frac{8}{27} > 0$. Inoltre anche $f(-1)(= 1)$ è positivo, perciò f ammette un'unica radice reale.

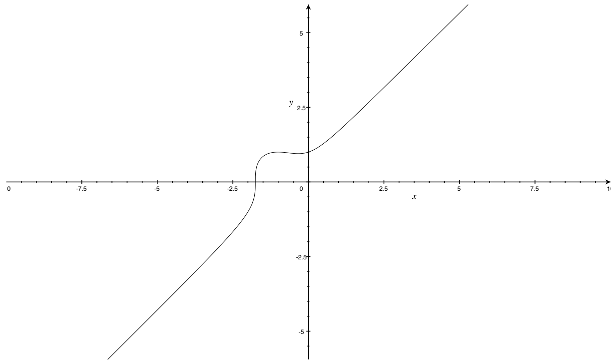

Figura 2: Il grafico di $y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1}$

Esercizio 5

(a)

Si tratta di di due integrali impropri (in 0 e a $+\infty$). Per quanto riguarda

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx$$

approssimiamo le funzioni date con i rispettivi polinomi di Mc Laurin:

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^\alpha}$$

dunque

$$\int_0^1 f_\alpha(x)dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 2$$

(per confronto con $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$).

In un intorno di $+\infty$

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^\alpha}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad .$$

L'integrale dato converge $\forall \alpha \in (1,2)$.
(b)
Da quanto appena visto per $\alpha = 3$ l'integrale dato diverge a $+\infty$, dunque il limite è una forma indeterminata dal tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$, che studiamo applicando De l'Hopital

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{\arctan(x^{\frac{3}{2}})}{x} + \frac{|\sin \sqrt{x}|}{x^{\frac{3}{2}}} \Big) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad .$$