Cognome e nome ____________________

APPELLO C AM1C
19 Gennaio 2010

Esercizio 1.

Sia data la funzione

$$f(x) = \log(\sqrt{|x|} + 2) - x$$

(a)Determinarne: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, eventuali punti angolosi o di cuspide, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Discutere l'uniforme continuità di $f(x)$ (sugg. anche attraverso lo studio della derivata prima)

Cognome e nome ____________________

APPELLO C AM1C
19 Gennaio 2010

Esercizio 2.
(a) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(\sqrt{x}+2x-2)}{\log(x+4x^2-4)} \quad .$$

(b) Determinare i valori del parametro reale β per cui il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$$

esiste, è finito ed è diverso da zero.

Cognome e nome ____________________

APPELLO C AM1C
19 Gennaio 2010

Esercizio 3.
(a) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{2}{2+x}}}{(2+x)^3} dx \quad .$$

(b) Dire se risulta convergente o meno

$$\int_{-4}^{-2} \frac{e^{\frac{2}{2+x}}}{(2+x)^3} dx \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO C AM1C
19 Gennaio 2010

Esercizio 4.
Studiare la convergenza del seguente integrale al variare del parametro reale α.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{\sqrt{1+x^\alpha} - 1} dx \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO C AM1C
19 Gennaio 2010

Esercizio 5.
(a) Sia
$$F(x) = \int_1^{1+x} \frac{\log t}{t} dt \quad .$$
Scrivere il suo polinomio di Taylor centrato in 0 di ordine 3.
(b) Dimostrare che la funzione
$$F(x) - x$$
è decrescente nel suo dominio naturale.

Soluzioni

Esercizio 1

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ e } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)+x = +\infty$$

$\Rightarrow f$ non ammette asintoti.

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{sgn}(x))}{2\sqrt{|x|}(\sqrt{|x|}+2)} - 1 = \frac{(\mathrm{sgn}(x) - 2|x| - 4\sqrt{|x|})}{2(|x| + 2\sqrt{|x|})}$$

$\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R} - 0$, $(f(0) = \log 2)$. Si osserva facilmente che se $x < 0$, allora $f'(x) < 0$, mentre quando $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{(1-2x-4\sqrt{x})}{2(x+2\sqrt{x})}$, che si annulla per $x_0 = (\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)^2$ ed è positiva per $x \in (0, x_0)$, quindi 0 è punto di minimo locale e x_0 è punto di massimo locale. Studiando il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale di $f(x)$ nel punto $x = 0$, si conclude che $(0, \log 2)$ è un punto di cuspide per la funzione.

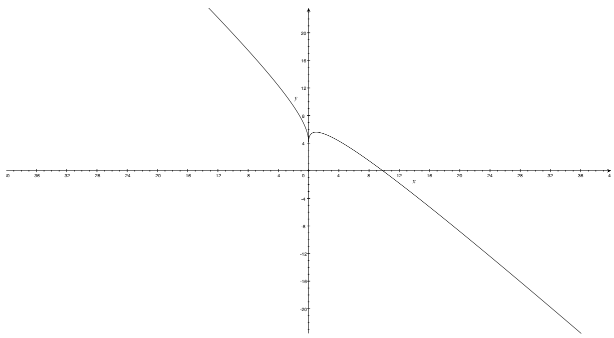

Figura 1: Il grafico di $y = \log(\sqrt{|x|} + 2) - x$

(b) In ogni intervallo chiuso e limitato f è U.C. perché continua. In particolare è U.C. in un intorno dello

0. Negli intervalli della forma $[a, +\infty)$ e $(-\infty, -a]$ (con $a > 0$) $f'(x)$ è limitata ($\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$), dunque f è U.C. su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2

(a) È una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, si può applicare la regola di De l'Hopital, il limite dato è uguale a

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2x-2)} \cdot \frac{x+4x^2-4}{1+8x} = \frac{5}{18} \quad .$$

(b) Se $\beta < 0$ il limite dato è pari a 0, mentre se $\beta > 0$ è una F.I. del tipo $[\infty \cdot 0]$. Lo possiamo riscrivere nel seguente modo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-\beta}} \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta x^{\beta+1}}{1+x^2} = l$$

(avendo applicato la regola di De l'Hopital) e $l = 0$ se $\beta < 1$, $l = +\infty$ se $\beta > 1$ e $l = 1$ quando $\beta = 1$.

Esercizio 3

(a) Con la sostituzione $t = \frac{2}{2+x}$, l'integrale dato si trasforma nel seguente

$$\int_1^2 te^t dt$$

che integrato per parti, dà come risultato il numero $\frac{1}{4}e^2$.

(b) Con la stessa sostituzione del punto precedente l'integrale dato diventa

$$\int_{-\infty}^{-1} te^t dt = -\frac{2}{e} - \lim_{t\to-\infty} e^t(t-1) = -\frac{2}{e} - \lim_{y\to+\infty} \frac{-1-y}{e^y} = \frac{2}{e}$$

(avendo posto $y = -t$) e dunque converge.

Esercizio 4

Studiamo prima la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{\sqrt{1+x^\alpha} - 1} dx$$

La funzione integranda in un intorno dello 0 si comporta come $f(x) = \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ dunque in un intorno di 0 l'integrale dato converge $\Leftrightarrow \alpha < 3$. Riguardo la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x + 1 - \cos x}{\sqrt{1+x^\alpha} - 1} dx$$

stimiamo la funzione integranda con $g(x) = \frac{3}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$, il cui integrale in un intorno di $+\infty$ converge se e solo se $\alpha > 2$. Quindi l'integrale converge se $2 < \alpha < 3$.

Esercizio 5

(a) Si può scrivere esplicitamente $F(x) = \frac{1}{2}(\log^2(1+x))$ e quindi calcolare il suo polinomio di Mc Laurin come il quadrato del polinomio di Mac Laurin di $\log(1+x)$ (al terz'ordine):

$$(\frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2})^2) = \frac{1}{2}(x^2 - x^3) \quad .$$

(b) Studiamo il segno della derivata di $g(x) = F(x) - x$ che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta essere

$$g'(x) = \frac{\log(1+x)}{(1+x)} - 1$$

e dalla relazione $\log y < y$ - vera per ogni y - segue che

$$g'(x) < 0 \qquad \forall x > -1$$

e quindi la tesi.