Cognome e nome ____________________

APPELLO A AM1C
16 GIUGNO 2009

Esercizio 1.
Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{x}{1 + \log x} \quad .$$

(a)Determinarne: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.
(b) Sia

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < e^{-1} \\ ax + b & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare a, b in modo tale che $\tilde{f}$ risulti derivabile nel suo dominio.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A AM1C
16 GIUGNO 2009

Esercizio 2.
Sia $f(x)$ una funzione uniformemente continua in $[0, +\infty)$, monotona crescente e illimitata.
(a) Dimostrare che la funzione

$$g(x) = f(x) \cdot \sin(x^2)$$

non è uniformemente continua in $[0, +\infty)$.
(b) Scrivere un esempio di funzione $g(x)$ che soddisfa alle precedenti proprietà.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A AM1C
16 GIUGNO 2009

Esercizio 3.
Determinare il risultato del seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + \sin x) - x\sqrt{1-x}}{x^\alpha} \quad .$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A AM1C
16 GIUGNO 2009

Esercizio 4.
(a) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \cos(\log(x^2))dx \quad .$$

(b) Stabilire se si tratta dell'area del sottografico della funzione $f(x) = \cos(\log(x^2))$ nell'intervallo $(0,1)$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A AM1C
16 GIUGNO 2009

Esercizio 5. Dimostrare che

$$\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt \leq 1 + \log x \quad \forall x \geq 1$$

e calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \log x} \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$$

1 Soluzioni

Esercizio 1

(a)

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x > 0 : x \neq \frac{1}{e}\}$$

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \quad , \quad f(x) > 0 \quad \forall x > e^{-1} \quad .$$

Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^{\pm}} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to 0^{+}} f(x) = 0$$

quindi non ci sono asintoti verticali.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale.

Ricerca di massimi e minimi relativi:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{1+\log x})^2} \cdot \frac{1 + \log x - 1}{(1 + \log x)^2} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2 + x^2}$$

e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Inoltre $f'(x) > 0$ $\forall x \in (1 + \infty)$ perciò $x = 1$ è punto di minimo locale per f.

Osservazione 1 *Anche senza lo studio del segno di f'' si osserva che $f(x)$ deve avere (almeno) un punto di flesso $x_0 \in (e^{-1}, +\infty)$.*

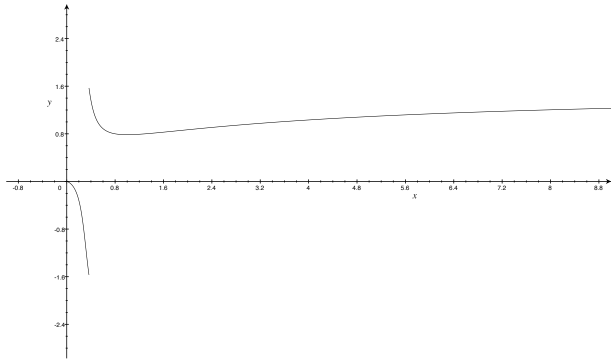

Figura 1: Il grafico di $y = \arctan \frac{x}{1+\log x}$

(b) Riguardo la continuità di $\tilde{f}$ in 0, l'abbiamo iniziata a studiare, facendo il limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad .$$

Perché $\tilde{f}$ sia continua deve essere

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^-} \tilde{f}(x)$$

ossia

$$b = 0 \quad .$$

Per la derivabilità deve essere

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{a(x+h)+b-b}{h}|_{x=0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\arctan \frac{x+h}{1+\log(x+h)}}{h}|_{x=0}$$

cioè

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{ah}{h} (= a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \arctan \frac{h}{1+\log h} \qquad (1.1)$$

e l'ultimo limite è uguale a 0, infatti, poiché $\frac{h}{1+\log h} \to 0$ per $h \to 0$, segue che in un intorno dello 0

$$\arctan \frac{h}{1+\log h} \sim \frac{h}{1+\log h}$$

e dunque il limite dato è pari al seguente

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{1+\log h}\frac{1}{h} = 0 \quad .$$

Perciò dall'uguaglianza (1.1) risulta che $\tilde{f}$ è derivabile nello 0 se $a = b = 0$. In ogni altro punto del suo dominio $\tilde{f}(x)$ è derivabile perché composizione di funzioni che lo sono.

Esercizio 2

(a) Dalle ipotesi su f segue che f ammette limite per $x \to +\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad . \tag{1.2}$$

Scegliamo due successioni di punti $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e verifichiamo che f non soddisfa le condizioni dell'uniforme continuità lungo queste successioni. Infatti quando $n \to +\infty$, $|x_n - y_n| \to 0$, mentre

$$|f(x_n)\sin(x_n^2) - f(y_n)\sin(y_n^2)| \to |f(x_n)\sin(\frac{\pi}{2}) - f(y_n)\sin(-\frac{\pi}{2})|$$
$$= |f(x_n) + f(y_n)| \to +\infty$$

per la (1.2) e poiché x_n e y_n divergono a $+\infty$.

(b) Es. $g(x) = x\sin(x^2)$.

Esercizio 3

Usiamo gli sviluppi di Taylor nell'intorno dello 0.

$$\log(1+\sin x) = \sin(x) - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3!})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{3!})^3 + o(x^9)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{7}{24}x^3 + o(x^3)}{x^\alpha} = l$$

e

$$l = \begin{cases} \frac{7}{24} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

Esercizio 4

È un integrale improprio perché la funzione integranda non è definita nello 0. Per trovare una primitiva di $\cos(\log(x^2))$ effettuiamo il cambio di variabile $t = \log(x^2)$, da cui $x = e^{\frac{t}{2}}, dx = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}dt$ e

$$\int_0^1 \cos(\log(x^2))dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{t}{2}}\cos(t)dt$$

che, integrando per parti, diventa:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\cos t|_x^0 + \frac{1}{2}\int_x^0 e^{\frac{t}{2}}\sin t dt\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to-\infty}\Big(e^{\frac{t}{2}}\cos t|_x^0 + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin t|_0^x - \frac{1}{2}\int_x^0 e^{\frac{t}{2}}\cos t dt\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{t}{2}}\cos t dt = \frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}[e^{\frac{t}{2}}\cos t + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin t]_x^0$$

$$= \frac{1}{5}(1 - \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2}}(\cos x + \frac{1}{2}\sin x) = \frac{1}{5} \quad .$$

(b) Non corrisponde all'area della regione compresa tra $\cos(\log(x^2))$ e l'asse delle x, perché $\cos(\log(x^2))$ non è positiva per ogni $x \in (0,1)$.

Esercizio 5

Sia

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt - 1 - \log x \quad .$$

Vogliamo mostrare che $f(x) \leq 0 \ \forall x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\cos^2 x}{x} \leq 0 \quad \forall x \geq 1 \quad ,$$

quindi $f(x)$ è decrescente in $[1, +\infty)$. Perciò

$$\sup_{[1,+\infty)} f(x) = f(1) = \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt - 1$$

Poiché $\sin^2 t \leq t^2$, segue che $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{t^2}{t} dt = \frac{1}{2}$ e perciò

$$f(1) \leq \frac{1}{2} - 1 < 0$$

da cui segue la tesi.

Applicando il teorema di De l'Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \log x} \int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{\log x + 1} = 0 \quad .$$