ESERCITAZIONE 2: UNIFORME CONTINUITÀ

Tiziana Raparelli

03/03/2009

1

Teorema 1.1. *Siano $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ t. c. f è continua e g è U.C. Se*

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

allora f è U.C.

Dimostrazione. Hp:
1. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_g > 0$ t. c. se $|x - y| < \delta_g$ allora $|g(x) - g(y)| < \epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \bar{x} > 0$ t. c. $|f(x) - g(x)| < \epsilon \ \forall x > \bar{x}$.

La restrizione di f all'intervallo chiuso e limitato $[0, \bar{x} + 1]$ è U.C. per il teorema di Heine Cantor, quindi $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_f$ t. c. se $x, y \in [0, \bar{x} + 1]$ e $|x - y| < \delta_f$ allora $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Consideriamo $\delta = \min(\delta_f, \delta_g, 1)$ e prendiamo $x, y \in [0, +\infty)$ con $|x - y| < \delta$.
Dalla scelta di δ, risultano essere possibili solo i seguenti due casi:

$$x, y \le \bar{x} + 1, \qquad \text{oppure } x, y \ge \bar{x}.$$

Nel primo caso $x, y \in [0, \bar{x} + 1] \Longrightarrow f$ è U.C. per quanto visto sopra.
Se invece $x, y \in [\bar{x}, +\infty)$, poiché per ipotesi $|x - y| < \delta \le \delta_g$,

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)| < 3\epsilon \quad ,$$

dunque f è U.C. □

Corollario 1.1. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Se f ammette asintoto (obliquo o orizzontale), allora f è U.C.*

Dimostrazione. Segue dal teorema precedente scegliendo come g la retta asintoto di f.
(Infatti $g(x) = mx + q$ è U.C. , basta prendere nella def. $\delta = \frac{\epsilon}{m}$ e $g(x) = c$ è chiaramente U.C.) □

ESERCIZIO 1:

$f(x) = x^2$ non è U.C.

ESERCIZIO 2:

Discutere l'uniforme continuità delle seguenti funzioni, negli intervalli indicati.

$$
\begin{aligned}
(a) f(x) &= 3x + \frac{\sin(x)}{1+x^2} \quad , \qquad [0,1] \quad , \quad [1,+\infty) \\
(b) f(x) &= \frac{x^2+1}{3x+2} \quad , \qquad [5,+\infty) \quad , \quad \mathrm{Dom}(f) \\
(c) f(x) &= e^{x^2(1-\cos\frac{1}{x})} \quad , \qquad (0,1] \quad , \quad [1,2] \quad , \quad [2,+\infty) \quad .
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 3:

Discutere l'uniforme continuità di $f(x) = x\cos(x^2)$.

ESERCIZIO 4:

Discutere l'uniforme continuità di $f(x) = \sin(x^2)$.

ESERCIZIO 5:

Mostrare con dei controesempi che il teorema di Heine-Cantor non vale se l'intervallo considerato non è chiuso o non è limitato.

2

RISPOSTE:

ESERCIZIO 1:

Per il lemma della farfalla: non esistono due costanti reali A, B tali che $x^2 < A|x| + B \ \forall x$.

ESERCIZIO 2:

Osservazione: tutte le funzioni assegnate sono continue negli intervalli dati.
(a) U.C. in $[0,1]$ (basta applicare Heine-Cantor).
U.C in $[1+\infty)$ perchè asintotica alla funzione uniformemente continua $g(x) = 3x$.
(b) U.C. in $[5,+\infty)$ perchè ammette asintoto obliquo
$g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$.
Non è U.C. in $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)(= \mathrm{Dom}(f))$ perchè

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}^{\pm}} = \pm\infty \quad .$$

(c) U.C. in $(0,1]$ perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1(< +\infty)$.
U.C. in $[1,2]$ per il teorema di Heine Cantor.
U.C. in $[2,+\infty)$ perché ammette asintoto orizzontale (a $+\infty$) ($g(x) = \sqrt{e}$).

ESRCIZIO 3:

$x\cos(x^2)$ non è U.C. su $\mathbb{R}$ (sebbene $|x\cos(x^2)| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$). Basta scegliere le due successioni di punti $x_n = \sqrt{2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$. Quando $n \to +\infty$, $|x_n - y_n| \to 0$, mentre

$$|x_n \cos(x_n^2) - y_n \cos(y_n^2)| = |\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n+1)\pi}| \to +\infty \quad .$$

ESERCIZIO 4:

$\sin(x^2)$ non è U.C. in $\mathbb{R}$, sebbene limitata ($|\sin(x^2)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$). Basta scegliere le due successioni di punti $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Quando $n \to +\infty$, $|x_n - y_n| \to 0$, mentre

$$|\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)| = |\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})| \to 2 \quad .$$

ESERCIZIO 5:

$f(x) = \frac{1}{x}$ non è U.C. nell'intervallo non chiuso $(0,1]$.
$g(x) = x^2$ non è U.C. nell'intervallo non limitato $[0,+\infty)$.

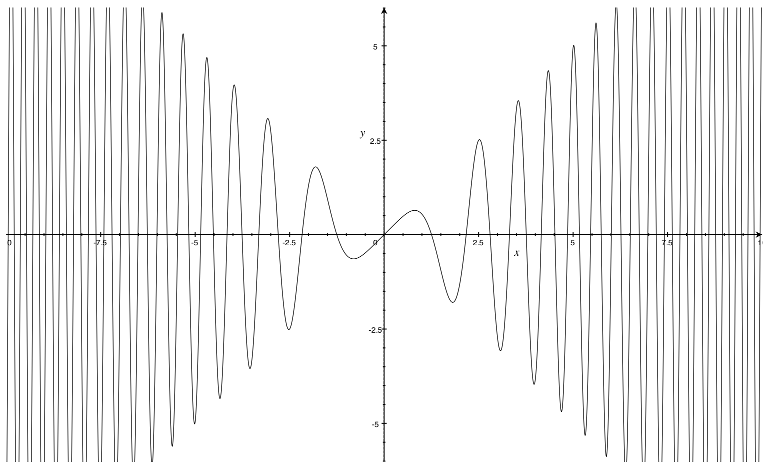

Figura 1: Il grafico di $y = x \cos x^2$

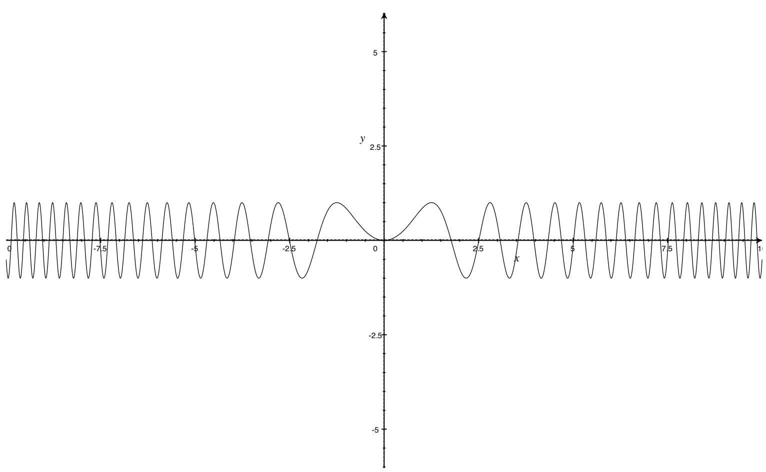

Figura 2: Il grafico di $y = \sin x^2$