

# Am1c – Tutorato IX

## Integrazione funzioni irrazionali

Mercoledì 6 Maggio 2009

Filippo Cavallari

**Esercizio 1** Calcolare i seguenti integrali utilizzando le sostituzioni suggerite:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx & x = a \sin t \\ (2) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx & x = a \sinh t \\ (3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx & x = a \cosh t \\ (4) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx & x = a \sin t \\ (5) \int \sqrt{a^2 + x^2} dx & x = a \sinh t \\ (6) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx & x = a \cosh t \end{array}$$

(Ricordiamo che  $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  e  $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ )

**Nota** Nell'esercizio che segue saranno utili le seguenti considerazioni: negli integrali contenenti  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ci si può sempre ricondurre a uno dei sei tipi dell'esercizio 1. Infatti distinguiamo due casi:

- Se  $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$  è possibile trasformare  $ax^2 + bx + c$  nella differenza di due quadrati. Infatti  $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2) = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)]$
- Se  $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$  è possibile trasformare  $ax^2 + bx + c$  nella somma di due quadrati. Infatti  $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (-b^2 + 4ac)]$

**Esercizio 2** Calcolare i seguenti integrali irrazionali:

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} dx & (2) \int \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx \\ (3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx & (4) \int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} dx \\ (5) \int \sqrt{x^2 + 4x + 13} dx & (6) \int \sqrt{-x^2 - x + 1} dx \\ (7) \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx & (8) \int \frac{x^3 + x}{\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2}} dx \end{array}$$