

Am1c – Soluzioni Tutorato VIII

Integrali funzioni razionali fratte e trigonometrici

Mercoledì 29 Aprile 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 (1) Seno: per $n = 1$ dobbiamo mostrare che

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

da cui segue la tesi.

Ricordiamo che nel tutorato precedente abbiamo visto che, posto $S_n = \int \sin^n x dx$, si ha

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

Supponiamo ora che

$$\int \sin^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \sin^{2i-1} x \cos x + c$$

e mostriamo che è vera anche per $n+1$. Utilizzando la formula iterativa e l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned} \int \sin^{2(n+1)} x dx &= \int \sin^{2n+2} x dx = -\frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1} x \cos x + \frac{2n+1}{2n+2} \int \sin^{2n} x dx = \\ &= -\frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1} x \cos x + \frac{2n+1}{2n+2} \left[\left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x - \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \sin^{2i-1} x \cos x \right] + c \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) x - \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) \sin^{2i-1} x \cos x + c \end{aligned}$$

cioè la tesi.

Coseno: per $n = 1$ dobbiamo mostrare che

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c.$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx$$

da cui segue la tesi.

Ricordiamo che nel tutorato precedente abbiamo visto che, posto $C_n = \int \cos^n x dx$, si ha

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}$$

Supponiamo ora che

$$\int \cos^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c$$

e mostriamo che è vera anche per $n+1$. Utilizzando la formula iterativa e l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned} \int \cos^{2(n+1)} x dx &= \int \cos^{2n+2} x dx = \frac{1}{2n+2} \cos^{2n+1} x \sin x + \frac{2n+1}{2n+2} \int \cos^{2n} x dx = \\ &= \frac{1}{2n+2} \cos^{2n+1} x \sin x + \frac{2n+1}{2n+2} \left[\left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x \right] + c \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c \end{aligned}$$

cioè la tesi.

(2) Seno: utilizzando la relazione goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otteniamo

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx$$

ora posto $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ si ha

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx &= -\int (1 - t^2)^n dt \\ &= -\int \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} \right] dt \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int t^{2k} dt \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + c \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos^{2k+1} x + c \end{aligned}$$

Coseno: utilizzando la relazione goniometrica fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otteniamo

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx$$

ora posto $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ si ha

$$\begin{aligned} \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx &= \int (1 - t^2)^n dt \\ &= \int \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} \right] dt \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} (-1)^k \int t^{2k} dt \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} + c \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sin^{2k+1} x + c \end{aligned}$$

Esercizio 2 (1) Dato che $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2-5x+6}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = -3 \int \frac{dx}{x-2} + 4 \int \frac{dx}{x-3} = -3 \ln|x-2| + 4 \ln|x-3| + c$$

(2) Dato che $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ imponiamo che

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{x^2-3x+2}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = -2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x-2} = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + c$$

(3) Dato che $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ imponiamo che

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + A-B+C}{x^3-x^2-x+1}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \\ C=1 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

(4) Imponiamo che

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + A-2B+2C}{(x+2)(x-1)^2}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B+C=0 \\ A-2B+2C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4/9 \\ B=5/9 \\ C=1/3 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} dx = \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{4}{9} \ln|x+2| + \frac{5}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + c$$

(5) Imponiamo che

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 + (-2A+B)x + A-B+C}{(x-1)^3}$$

e quindi

$$\begin{cases} A=1 \\ -2A+B=0 \\ A-B+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3} dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^3} = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

(6) Dato che $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ imponiamo che

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A-C}{x^3-1}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=4 \\ A-C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x^3-1} dx = 3 \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 3 \ln|x-1| - \ln(x^2+x+1) + c$$

(7) Dato che $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2$ imponiamo che

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^4 + (-B+C)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 + (-B+C-D+E)x + A-C-E}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ 2A+B-C+D=2 \\ -B+C-D+E=0 \\ A-C-E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \end{cases}$$

da cui

$$\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

(8) Imponiamo che

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 - (2B-C)x + A-2C}{(x-2)(1+x^2)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2B-C=0 \\ A-2C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/5 \\ B=2/5 \\ C=4/5 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5} \int \frac{2x+4}{x^2+1} dx = \frac{3}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{5} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{3}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{4}{5} \arctan x + c \end{aligned}$$

(9) Imponiamo che

$$\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{(A+B)x^2 + (5B+C)x + 9A+5C}{(x+5)(x^2+9)}$$

e quindi

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 5B+C=11 \\ 9A+5C=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=-4 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} dx &= 2 \int \frac{dx}{x+5} + \int \frac{3x-4}{x^2+9} dx = 2 \ln|x+5| + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx - 4 \int \frac{dx}{x^2+9} = \\ &= 2 \ln|x+5| + \frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{4}{3} \arctan \frac{x}{3} + c \end{aligned}$$

$$(10) \int \frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+9}} dx = \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)^2}} dx = \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \ln(x^2+3) + c$$

Esercizio 3 Dato che $1+x^4 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ si ha che

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

da cui si ottiene che $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $B = \frac{1}{2}$ $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $D = \frac{1}{2}$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^4} dx &= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} = \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + c
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (1) Aggiungendo e sottraendo x^2 al numeratore si ottiene

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

dai cui, integrando per parti con $f' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $g = x$ si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c
\end{aligned}$$

(2) Consideriamo I_{n-1} : integrando per parti con $f = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ $g' = 1$, si ha

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^n} dx = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - 2(n-1) \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n
\end{aligned}$$

da cui la tesi.

(3a) Utilizzando il metodo del completamento del quadrato otteniamo

$$\int \frac{1}{(7x^2+4x+3)^3} dx = \int \frac{1}{\left[\left(\sqrt{7}x + \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \frac{17}{7}\right]^3} dx = \left(\frac{7}{17}\right)^3 \int \frac{1}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + 1\right]^3} dx$$

ora posto $t = \frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}$ e quindi $dt = \frac{7}{\sqrt{17}}dx$ si ha

$$\left(\frac{7}{17}\right)^3 \int \frac{1}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + 1\right]^3} dx = \left(\frac{7}{17}\right)^3 \frac{\sqrt{17}}{7} \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$$

utilizzando quindi la formula dell'esercizio precedente si ottiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{7}{17}\right)^3 \frac{\sqrt{17}}{7} \int \frac{1}{(t^2+1)^3} dt &= \left(\frac{7}{17}\right)^3 \frac{\sqrt{17}}{7} \left(\frac{3}{8} \arctan t + \frac{3}{8} \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{4} \frac{t}{(t^2+1)^2} + k \right) = \\
&= \left(\frac{7}{17}\right)^3 \frac{\sqrt{17}}{7} \left(\frac{3}{8} \arctan \left(\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}} \right) + \frac{3}{8} \frac{\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}}{\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + 1} + \frac{1}{4} \frac{\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}}{\left[\left(\frac{7}{\sqrt{17}}x + \frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + 1\right]^2} \right) + c
\end{aligned}$$

(3b) Analogamente a prima si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x^2+2)^4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+2)^4} dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^4} dx = \\
&= -\frac{1}{6(x^2+2)^3} + \frac{\sqrt{2}}{16} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]^4} \frac{dx}{\sqrt{2}} = \\
&= -\frac{1}{6(x^2+2)^3} + \frac{\sqrt{2}}{16} \int \frac{1}{(t^2+1)^4} dt
\end{aligned}$$

dalla formula dell'esercizio precedente si ottiene

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^4} dt = \frac{5}{16} \arctan t + \frac{5}{16} \frac{t}{t^2+1} + \frac{5}{24} \frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{6} \frac{t}{(t^2+1)^3} + k$$

e quindi

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2)^4} dx = \frac{5\sqrt{2}}{256} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{128} \frac{x}{x^2+2} + \frac{5}{96} \frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{12} \frac{x-2}{(x^2+2)^3} + c$$

Esercizio 5 Osserviamo, prima di svolgere gli integrali, che $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow 2 \arctan t = x \Rightarrow \frac{2dt}{1+t^2} = dx$.

Inoltre, dal suggerimento, si ottiene facilmente che:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(1)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{2t}{t^2+2t+1} dt \\
&= \int \frac{2t+2}{t^2+2t+1} dt - 2 \int \frac{1}{t^2+2t+1} dt \\
&= \ln(t^2+2t+1) + \frac{2}{t+1} + c \\
&= \ln\left(\tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + 1\right) + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx &= \int \frac{1}{3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{\frac{6t+4-4t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{1+t^2}{6t+4-4t^2} dt \\ &= -4 \int dt + \int \frac{6t+8}{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)} dt \\ &= -4t - 2 \int \frac{dt}{t+\frac{1}{2}} + 8 \int \frac{dt}{t-2} \\ &= -4t - 2 \ln \left| t + \frac{1}{2} \right| + 8 \ln |t-2| + c \\ &= -4 \tan \frac{x}{2} - 2 \ln \left| \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right| + 8 \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| + c\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)} = \\ &= \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} \\ &= \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |1-t| - \frac{1}{2} \ln |1+t| + c \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c\end{aligned}$$