

# Am1c – Tutorato VIII

Integrali funzioni razionali fratte e trigonometrici

Mercoledì 29 Aprile 2009

Filippo Cavallari

**Esercizio 1** (1) Dimostrare che per ogni  $n \geq 1$  si ha

$$\int \sin^{2n} x dx = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x - \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \sin^{2i-1} x \cos x + c$$

$$\int \cos^{2n} x dx = \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^n \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c$$

*Suggerimento: procedere per induzione ricordando le formule ricorsive trovate nello scorso tutorato*

(2) Trovare delle analoghe formule non ricorsive nel caso in cui l'esponente delle funzioni integrande sia dispari

*Suggerimento: può essere utile ricordare la formula del binomio di Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Esercizio 2** Calcolare i seguenti integrali:

(1)  $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

(2)  $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$

(3)  $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} dx$

(4)  $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} dx$

(5)  $\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3} dx$

(6)  $\int \frac{(x+2)}{x^3-1} dx$

(7)  $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx$

(8)  $\int \frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} dx$

(9)  $\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} dx$

(10)  $\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+9}} dx$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale fratto:

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

**Esercizio 4** (1) Calcolare per parti il seguente integrale fratto:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

(2) Definiamo  $\forall n \geq 1$

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Dimostrare che:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[ (2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]$$

(3) Calcolare, utilizzando il punto precedente, i seguenti integrali fratti:

(a)  $\int \frac{1}{(7x^2 + 4x + 3)^3} dx$

(b)  $\int \frac{x+1}{(x^2+2)^4} dx$

**Esercizio 5** Utilizzando la sostituzione  $t = \tan \frac{x}{2}$  calcolare i seguenti integrali:

(1)  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

(2)  $\int \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x} dx$

(3)  $\int \frac{\tan x}{1 - \cos x} dx$

*Suggerimento: ricordarsi che sussistono le seguenti relazioni*

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$