Am1c – Soluzioni Tutorato IV

Derivate e teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Mercoledì 18 Marzo 2008

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Notiamo innanzitutto che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate in quanto $|\sin x| \le 1$ e $|\cos x| \le 1$ per qualsiasi valore di *x*. Inoltre la funzione x^c definita nell'intervallo $[-1,1]$ è limitata se e solo se $c \ge 0$.

(1) $f(x)$ è continua se $\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \sin\frac{1}{x^{\beta}} = 0$ per cui $\alpha > 0$.

(2) $f'(0)$ esiste se $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^{\beta}}$ esiste finito cioè se $\alpha > 1$ nel qual caso $\lim_{h\to 0} h^{\alpha-1} \sin\frac{1}{h^{\beta}} = 0$.

(3) Nel caso in cui $\alpha > 1$, cioè quando la derivata prima esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos\frac{1}{x^{\beta}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \ge 1 + \beta$.

(4) $f'(x)$ è continua se e soltanto se $\lim_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos\frac{1}{x^{\beta}} = 0$ cioè se $\alpha > 1 + \beta$.

(5) $f''(0)$ esiste se $\lim_{h\to 0} \alpha h^{\alpha-2} \sin\frac{1}{h^{\beta}} - \beta h^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{h^{\beta}}$ esiste finito cioè se $\alpha > \beta + 2$ nel qual caso $\lim_{h\to 0} \alpha h^{\alpha-2} \sin\frac{1}{h^{\beta}} - \beta h^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{h^{\beta}} = 0$.

(6) Nel caso in cui $\alpha > \beta + 2$, cioè quando la derivata seconda esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f''(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{x^{\beta}} - \beta(\alpha-\beta-1) x^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{x^{\beta}} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2} \sin\frac{1}{x^{\beta}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \ge 2 + 2\beta$.

(7) $f''(x)$ è continua se e soltanto se

$$\lim_{x\to 0} \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \sin\frac{1}{x^{\beta}} - \alpha\beta x^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{x^{\beta}} - \beta(\alpha-\beta-1) x^{\alpha-\beta-2} \cos\frac{1}{x^{\beta}} - \beta^2 x^{\alpha-2\beta-2} \sin\frac{1}{x^{\beta}} = 0$$

cioè se $\alpha > 2 + 2\beta$.

Esercizio 2 Le funzioni elencate sono derivabili negli intervalli considerati in quanto sono somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre esse assumono lo stesso valore agli estremi dei rispettivi intervalli (verifica che viene omessa). Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Rolle. Troviamo esplicitamente i valori per i quali hanno derivata nulla negli intervalli indicati:

(1) $f'(x)=2x-3$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

(2) $f'(x)=3x^2+10x-6$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{43}}{3}$.

(3) $f'(x)=2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

(4) $f'(x)=-2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Esercizio 3 È immediato verificare che $f(-1)=f(1)=0$. Dal calcolo diretto segue inoltre che $f'(x)=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ $\forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$ che non si annulla mai mentre nell'origine la funzione non è derivabile. Per questo il teorema di Rolle non si può applicare.

Esercizio 4 La funzione è derivabile in $[0,1]$ in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange. Dato che $f'(x)=2-2x$, segue $2-2c=f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$ e quindi $c=\frac{1}{2}$.

Esercizio 5 La funzione è derivabile in $[0,b]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta quindi che $nc^{n-1}=f'(c)=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=b^{n-1}$ e quindi $c=\frac{b}{\sqrt[n-1]{n}}$.

Esercizio 6 Per il teorema di Lagrange esiste $c\in(1,2)$ tale che

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$$

Dato che la funzione $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ è decrescente risulta che

$$\frac{1}{12}<\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}=f'(2)<\sqrt[3]{2}-1<f'(1)=\frac{1}{3}$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 7 (1) Distinguiamo due casi: se $x\geq 0$ allora per il teorema di Lagrange risulta $\frac{e^x-1}{x}=e^c$ con $c\in[0,+\infty)$ e nell'intervallo considerato $e^c\geq 1$; il caso $x<0$ è analogo.

(2) Considerata la funzione $f(x) = x^n$ per $x \in [a,b]$ dal teorema di Lagrange segue $\frac{b^n - a^n}{b-a} = nc^{n-1} < nb^{n-1}$ da cui la tesi.

Esercizio 8 Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $[1,2]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy. Pertanto risulta

$$\frac{2c}{3c^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{4-1}{8-1} = \frac{3}{7} \text{ con } c \in [1,2]$$

da cui $c = \frac{14}{9}$.

Esercizio 9 (1) Posto $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.

(2) Posto $f(x) = \arccos x + \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x) = 0 \ \forall x \in (-1,1)$. Pertanto, poiché $f(0) = 0$, risulta $f(x) \equiv 0$ cioè la tesi.