Am1c – Tutorato IV

Derivate e teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Mercoledì 18 Marzo 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ definiamo nell'intervallo $[-1,1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Provare che:

(1) f è continua se e solo se $\alpha > 0$
(2) $f'(0)$ esiste se e solo se $\alpha > 1$
(3) f' è limitata se e solo se $\alpha \geq 1 + \beta$
(4) f' è continua se e solo se $\alpha > 1 + \beta$
(5) $f''(0)$ esiste se e solo se $\alpha > 2 + \beta$
(6) f'' è limitata se e solo se $\alpha \geq 2 + 2\beta$
(7) f'' è continua se e solo se $\alpha > 2 + 2\beta$

Esercizio 2 Dopo aver verificato che le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle negli intervalli indicati, trovare esplicitamente i punti in cui hanno derivata nulla:

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad x \in [1,2]$
(2) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x \quad x \in [0,1]$
(3) $f(x) = \sin^2 x \quad x \in [0,\pi]$
(4) $f(x) = \cos^2 x \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

Esercizio 3 Dopo aver verificato che la funzione $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ si annulla agli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ mostrare che la sua derivata non si annulla in nessun punto dell'intervallo $(-1,1)$. Perché non si può applicare il teorema di Rolle?

Esercizio 4 Verificare il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = 2x - x^2$ nell'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 5 In quale punto la tangente alla funzione $f(x) = x^n$ è parallela alla corda passante per i punti $A(0;0)$ e $B(b;b^n)$?

Esercizio 6 Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con $x \in [1,2]$ per dedurre che $\dfrac{13}{12} < \sqrt[3]{2} < \dfrac{4}{3}$.

Esercizio 7 Usando il teorema di Lagrange dimostrare che:

(1) $e^x \geq 1+x$

(2) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ per $b > a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$

Esercizio 8 Verificare il teorema di Cauchy per le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ nell'intervallo $[1,2]$.

Esercizio 9 Dimostrare le seguenti identità:

(1) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$