

Am1c – Tutorato III

Derivate

Mercoledì 11 Marzo 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Calcolare, usando la definizione, le derivate di:

(1) $\frac{1}{x}$ (2) \sqrt{x} (3) $\tan x$ (4) x^n

Esercizio 2 Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni derivabili in x_0 . Calcolare $(fgh)'(x_0)$.

Esercizio 3 Calcolare le seguenti derivate utilizzando soltanto le derivate delle funzioni elementari e le opportune regole di derivazione:

(1) $\ln x$ (2) $x^r \quad r \in \mathbb{R}$ (3) $\arccos x$ (4) $\tan x$

(5) $\arctan x$ (6) $\sin(3x^3 + 4^x)$ (7) $e^x(1 + x^2 + 3x^7)$ (8) 7^{x^2+4}

(9) $\sin(\pi^{\tan x})$ (10) $x \cdot \ln x \cdot \sin x$ (11) $e^{\sin(e^x)}$ (12) $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

(13) $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)e^{-\cos x}$ (14) $\ln(x + \sin(\ln x))$ (15) $e^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$ (16) $\frac{\sin^2 x + \cos x}{\ln x}$

(17) $\sin\left(\frac{\ln x}{x^3 + 4}\right)$ (18) $\ln^2(\arcsin x)$ (19) $\frac{\arctan(x^5 + x^\pi)}{\ln(2^x)}$ (20) $\sin(30x^3 - x^7)e^{\tan x}$

Esercizio 4 Mostrare un esempio per ognuno dei seguenti quesiti:

- una funzione continua ma non derivabile in un punto
- una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile in quel punto
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto esiste ma non è finito
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto non esiste

Esercizio 5 Fissato $\alpha > 1$ sia f definita $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che f è costante.

Esercizio 6 Definiamo le funzioni *seno* e *coseno iperbolico* nel modo seguente:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- provare a disegnare il grafico di entrambe le funzioni cercando di individuare eventuali simmetrie (in particolare dire se sono pari e/o dispari)
- verificare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- calcolare la derivata del seno e del coseno iperbolico
- indicare le loro funzioni inverse rispettivamente con $\sinh^{-1} x$ (*arcoseno iperbolico*) e $\cosh^{-1} x$ (*arcocoseno iperbolico*), calcolare le loro derivate
- dimostrare che
 - $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
 - $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- definita $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$, calcolarne la derivata
- calcolare le seguenti derivate:

$$(1) \sinh(\cosh(\sinh x)) \quad (2) \sinh\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{7^x}\right) \quad (3) e^{\sinh(\arctan x)}$$

Esercizio 7 Dire per quale valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

$$(1) \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & x < 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{4a+b}{x^2+1} & x \geq 1 \\ x^2 + 2x(a+b) - 1 & x < 1 \end{cases}$$

Esercizio 8 Dimostrare che:

$$(1) \frac{d^n}{dx^n} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (2) \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(3) \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (4) \frac{d^n}{dx^n} \frac{ax+b}{cx+d} = (-1)^{n-1} c^{n-1} n! \frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}} \quad ad-bc \neq 0$$

Esercizio 9 Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dire per quali α la funzione è continua, derivabile e ha derivata continua.