Am1c – Soluzioni Tutorato II

Uniforme continuità

Mercoledì 4 Marzo 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dato che $f(x)$ è uniformemente continua segue, scelto $\varepsilon = 1$, che esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| \le \delta$ allora $|f(x) - f(y)| \le 1$. Dati $x, x_0 \in [0;+\infty)$ sia n tale che

$$n\delta \le |x - x_0| \le (n+1)\delta;$$

esistono quindi n punti $x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} = x$ tali che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Dunque

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x_0) + f(x) - f(x_0)| \\
&\le |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \\
&\le |f(x_0)| + \sum_{k=1}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&\le |f(x_0)| + n + 1 \\
&\le |f(x_0)| + 1 + \frac{|x - x_0|}{\delta} \\
&\le |f(x_0)| + 1 + \frac{x_0}{\delta} + \frac{x}{\delta}
\end{aligned}$$

cioè la tesi.

Esercizio 2 (1) Uniformemente continua nell'intervallo $(-\infty;1)$ per il teorema dell'asintoto. Non è tuttavia uniformemente continua nell'intervallo $[1;+\infty)$: infatti se lo fosse, per il teorema della farfalla $\exists a,b \in \mathbb{R} : |e^x| \le a + bx$. Ne segue che per qualche $a,b \in \mathbb{R}$ risulta $\frac{e^x}{a+bx} \le 1$. Ma poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{a+bx} = +\infty$ questo non è possibile.

(2) Uniformemente continua in $[1;2]$ per il teorema di Weierstrass in quanto l'intervallo è un chiuso e limitato e la funzione è continua su di esso; non lo è in $(0;2]$ perché $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

(3) Uniformemente continua nell'intervallo $(-4;3)$ in quanto è possibile estenderla ad una funzione continua su $[-4;3]$. Non è tuttavia uniformemente continua in $[4;+\infty)$ poiché non soddisfa il teorema della farfalla.

(4) Nell'intervallo $(0;1)$ non è uniformemente continua in quanto non è estendibile per continuità nell'origine. Al contrario in $(1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto $\lim_{x\to 1^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin 1$ e $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (e quindi per il teorema dell'asintoto).

(5) Uniformemente continua in $(0;1)$ perché può essere estesa per continuità negli estremi dell'intervallo. Lo è anche nell'intervallo $(\pi;+\infty)$ per il teorema dell'asintoto.

(6) Uniformemente continua su tutto l'asse reale per il teorema dell'asintoto.

(7) Nell'intervallo $(0;1)$ la funzione è uniformemente continua in quando può essere estesa a una funzione continua in $[0;1]$. Per lo stesso motivo è uniformemente continua in $(-1;0)\cup(0;1)$, infatti si ha $\lim_{x\to 0^-} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

(8) In $(0;1)$ è uniformemente continua in quanto estendibile ad una funzione continua su $[0;1]$. In $[1;2]$ è uniformemente continua in quanto è continua su tutto l'intervallo. Infine in $[1;+\infty)$ è uniformemente continua in quanto ha un asintoto orizzontale, infatti $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = 1$.