Am1c – Soluzioni Tutorato XII

Teorema di de L'Hôpital, integrali impropri

Mercoledì 27 Maggio 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Dal teorema di de L'Hôpital e dal teorema fondamentale del calcolo si ha che:

(1) $\lim_{x\to 0}\cos x^2 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt = 1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \sin^2 t dt = 0$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin^2 t dt = \frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{\cos x} + \frac{x\cos x^2}{\sin x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\sin x} + \frac{x\cos x^2}{\sin x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\int_0^x \cos t^2 dt = 2$

Esercizio 2 Dalla regola di derivazione di funzione composta e dal teorema fondamentale del calcolo si ha che:

(1) $F'(x) = 3x^2\cos x^6$

(2) $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sin x}\cos x$

Esercizio 3

(1) Tramite la sostituzione $x^2 - 3 = t$ si ottiene

$$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_2^a \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^{a^2-3}\frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_{t=1}^{t=a^2-3} = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2-3}}+1\right) = 1$$

(2) Tramite la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ si ottiene

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{a}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \lim_{a\to+\infty} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{a}}\sin t dt = \lim_{a\to+\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt = \lim_{a\to+\infty}\left[-\cos t\right]_{x=\frac{1}{a}}^{x=\frac{\pi}{2}} = \lim_{a\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{a}\right) = 1$$

(3) Posto $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ integrando per parti si ricava

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\left[-x^n e^{-x} \right]_{x=0}^{x=a} + n\int_0^a x^{n-1} e^{-x} dx \right) = nI_{n-1}$$

Osservando che $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ si dimostra facilmente per induzione che $I_n = n!$

Esercizio 4 Entrambi gli integrali convergono se e solo se *a>0*. Calcoliamoli:

(1) Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \cancel{\left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \sin bx \right]_{x=0}^{x=+\infty}} + \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left[-\frac{b}{a^2} e^{-ax}\cos bx \right]_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx =$$

$$= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$$

Risulta quindi:

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

(2) In modo analogo al primo si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Esercizio 5 Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin x dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\sin x dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\left[-f(x)\cos x \right]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a f'(x)\cos x dx \right) =$$

$$= f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)\cos x dx$$

Ora dato che $\left| f'(x)\cos x \right| \le \left| f'(x) \right| = -f'(x)$ si ha che

$$\left| \int_0^{+\infty} f'(x)\cos x dx \right| \le \int_0^{+\infty} \left| f'(x)\cos x \right| dx \le \int_0^{+\infty} \left| f'(x) \right| dx = -\int_0^{+\infty} f'(x) dx = f(0)$$

pertanto $\left| \int_0^{+\infty} f(x)\sin x dx \right| \le 2f(0)$.

Esercizio 6 (1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge perché $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ che converge banalmente.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge perché, integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge in quanto $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(3) $\int_0^{+\infty} \log x \arctan \frac{1}{x} dx$ diverge in quanto $\lim_{x \to +\infty} x \log x \arctan \frac{1}{x} = +\infty$

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} dx$ diverge in quanto $\lim_{x \to +\infty} x e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x} = 1$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x^2} dx$ converge in quanto $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{1}{x^2} = 0$

(6) $\int_{-1}^{1} \ln\left(x^2\right) \tan x dx$ converge in quanto $\lim_{x \to 0} \ln\left(x^2\right) \tan x = 0$

Esercizio 7 (1) Tramite la sostituzione $\ln x = t$ si ha:

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

che pertanto converge se $\alpha > 1$.
(2) Si ha che l'integrale converge se esistono $s < 1 \quad t > 1$ tali che esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} x^s \frac{\arctan x}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^t \frac{\arctan x}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}}$$

Ricordando che $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$ otteniamo che

$$\lim_{x \to 0} x^s \frac{\arctan x}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}} = \lim_{x \to 0} x^s \frac{x + o(x)}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{s-\alpha+1} + o\left(x^{s-\alpha+1}\right)}{\sqrt{1 + x^3}}$$

e quindi tale limite esiste finito se $s - \alpha + 1 \ge 0$. Pertanto deve risultare $1 > s \ge \alpha - 1$ che in particolare implica che $\alpha < 2$.
D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} x^t \frac{\arctan x}{x^\alpha \sqrt{1 + x^3}} = \lim_{x \to +\infty} x^{t-\alpha-\frac{3}{2}} \frac{\arctan x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}}$$

che quindi esiste finito se $t-\alpha-\frac{3}{2}\leq 0$. Pertanto deve risultare $1<t\leq\alpha+\frac{3}{2}$ che in particolare implica che $\alpha>-\frac{1}{2}$.

In conclusione l'integrale è convergente se $-\frac{1}{2}<\alpha<2$.

(3) Si ha che l'integrale converge se esistono $s<1 \quad t>1$ tali che esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} x^s \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^t \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}$$

Ricordando che $\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} x^s \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}=\lim_{x\to 0} x^s \frac{x^2+o\left(x^2\right)}{x^\alpha \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{s-\alpha+2}+o\left(x^{s-\alpha+2}\right)}{\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}$$

e quindi tale limite esiste finito se $s-\alpha+2\geq 0$. Pertanto deve risultare $1>s\geq\alpha-2$ che in particolare implica che $\alpha<3$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} x^t \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}=\lim_{x\to+\infty} x^{t-\alpha-\frac{8}{3}} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^4}}$$

che quindi esiste finito se $t-\alpha-\frac{8}{3}\leq 0$. Pertanto deve risultare $1<t\leq\alpha+\frac{8}{3}$ che in particolare implica che $\alpha>-\frac{5}{3}$.

In conclusione l'integrale è convergente se $-\frac{5}{3}<\alpha<3$.

(4) Si ha che l'integrale converge se esistono $s<1 \quad t>1$ tali che esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} x^s \frac{1-\cos x^2}{x^\alpha \log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^t \frac{1-\cos x^2}{x^\alpha \log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$$

Ricordando che $\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right)$ e $\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} x^s \frac{1-\cos x^2}{x^\alpha \log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \lim_{x\to 0} x^s \frac{\frac{x^4}{2}+o\left(x^2\right)}{x^\alpha\left(\sqrt[3]{x}+o\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{s-\alpha+4-\frac{1}{3}}}{2}+o\left(x^{s-\alpha+4-\frac{1}{3}}\right)}{\left(1+\frac{o\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$

e quindi tale limite esiste finito se $s-\alpha+\frac{11}{3}\geq 0$. Pertanto deve risultare $1>s\geq\alpha-\frac{11}{3}$ che in particolare implica che $\alpha<\frac{14}{3}$.

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} x^t \frac{1-\cos x^2}{x^\alpha \log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^{t-\alpha} \frac{1-\cos x^2}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$$

che quindi esiste finito se $t-\alpha\leq 0$. Pertanto deve risultare $1<t\leq\alpha$ che in particolare implica che $\alpha>1$.

In conclusione l'integrale è convergente se $1<\alpha<\frac{14}{3}$.