Am1c – Tutorato XII

Teorema di de L'Hôpital, integrali impropri

Mercoledì 27 Maggio 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \sin^2 t dt$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin^2 t dt$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\int_0^x \cos t^2 dt$

Esercizio 2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

(1) $F(x)=\int_0^{x^3}\cos(t^2)dt$ (2) $F(x)=\int_1^{\sin x}\frac{e^t}{t}dt$

Esercizio 3 Calcolare i seguenti integrali impropri:

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}dx$ (2) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ (3) $\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Esercizio 4 Dire per quali *a,b* i seguenti integrali impropri convergono e in tali casi calcolarli:

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin(bx)dx$ (2) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(bx)dx$

Esercizio 5 Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione decrescente di classe $C^1([0;+\infty])$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ allora l'integrale

$$\int_0^{+\infty}f(x)\sin x dx$$

è convergente.

Esercizio 6 Dire quali dei seguenti integrali convergono:

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ (3) $\int_0^{+\infty}\log x\arctan\frac{1}{x}dx$

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x}dx$ (5) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x^2}dx$ (6) $\int_{-1}^{1}\ln(x^2)\tan x dx$

Esercizio 7 Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali impropri:

(1) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha} x}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}\sqrt{1+x^3}}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x^2}{x^{\alpha}\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\, dx$