Am1c – Soluzioni Tutorato X

Integrali definiti

Martedì 13 Maggio 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1 (1) Dato che $|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$ si ha che

$$\int_1^3 |x-2|\,dx = \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(2) Dato che $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ si ha che

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4$$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2}\ln^2 2$

(4) Integrando per parti si ottiene

$$\int_2^3 \ln\left(x^2 - x\right)dx = \left[x\ln\left(x^2 - x\right)\right]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{2x^2 - x}{x^2 - x}\,dx = 3\ln 6 - 2\ln 2 - \int_2^3 \frac{2x^2 - 2x + x}{x^2 - x}\,dx =$$

$$= 3(\ln 3 + \ln 2) - 2\ln 2 - \int_2^3 2 + \frac{x}{x(x-1)}\,dx = 3\ln 3 + \ln 2 - 2[x]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{dx}{x-1} =$$

$$= 3\ln 3 + \ln 2 - 2 - \left[\ln|x-1|\right]_{x=2}^{x=3} = 3\ln 3 + 2$$

(5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^3 \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt[2]{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

(6) Tramite la sostituzione $x = \cos t$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{1+\cos t}\sin t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{1+\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\,dt = [t - \sin t]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 2 (a) Supponiamo per assurdo che $f(x) \geq 3 \quad \forall x \in [0;5]$. Allora, dalla monotonia dell'integrale segue che

$$\int_0^5 f(x)\,dx \geq \int_0^5 3dx = 15$$

da cui l'assurdo.

(b) Dal teorema della media esiste $x_0 \in [0;5]$ tale che $5f(x_0) = \int_0^5 f(x)\,dx = 10$ cioè $f(x_0) = 2$.

(c) Supponiamo, ad esempio, che $f(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0;5]$ e che per assurdo $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in [0;5]$. Per ipotesi $f(x) \not\equiv 2$ pertanto scelto $x_1 \in (0;5)$ si ha che $f(x) > f(x_1) > f(0) \geq 2 \quad \forall x \in (x_1;5)$. Si ha quindi:

$$10 = \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^5 f(x)\,dx > 2\int_0^{x_1} dx + f(x_1)\int_{x_1}^5 dx = 2x_1 + (5-x_1)f(x_1) > 2x_1 + 2(5-x_1) = 10$$

Esercizio 3 Sia $y = r$ l'equazione della retta parallela all'asse *x*. Si ricava facilmente che la parabola interseca la retta nei punti di ascisse $x = \pm\sqrt{\frac{r}{a}}$. Pertanto l'area del segmento parabolico è

$$A = \int_{-\sqrt{\frac{r}{a}}}^{\sqrt{\frac{r}{a}}} (r - ax^2)\,dx = \left[rx - \frac{a}{3}x^3 \right]_{x=-\sqrt{\frac{r}{a}}}^{x=\sqrt{\frac{r}{a}}} = \frac{4}{3}r\sqrt{\frac{r}{a}}$$

Dato che l'area del rettangolo circoscritto al segmento parabolico è $S = 2r\sqrt{\frac{r}{a}}$ segue che

$$\frac{A}{S} = \frac{\frac{4}{3}r\sqrt{\frac{r}{a}}}{2r\sqrt{\frac{r}{a}}} = \frac{2}{3}$$

cioè la tesi.

Esercizio 4 Chiamiamo *A* l'area cercata. Le due parabole si intersecano nel punto di ascissa $x = 0$ e hanno il vertice sull'asse *x* rispettivamente nei punti di ascissa $x = -2$ e $x = 2$. Poiché per $-2 < x < 0$ l'area cercata è delimitata da p_1 e l'asse *x* mentre per $0 < x < 2$ è delimitata da p_2 e l'asse *x* si ha che

$$A = \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 4)\,dx + \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right]_{x=-2}^{x=0} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Esercizio 5 (a) Dal cambio di variabile $t=-y$ si ha

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=-\int_0^{x} f(-y)dy=-F(x)$$

(b) Dal cambio di variabile $t=-y$ si ha

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt=-\int_0^{x} f(-y)dy=F(x)$$

Esercizio 6 La funzione $f(x)=\sin x+1$ è ovviamente periodica di periodo 2π tuttavia $F(x)$ non lo è. Infatti

$$F(x)=\int_0^{x}(\sin t+1)dt=[-\cos t+t]_{t=0}^{t=x}=-\cos x+x+1$$

che non è periodica.
Per trovare condizioni necessarie e/o sufficienti affinché ciò accada ragioniamo nel seguente modo: vogliamo che se f è T-periodica allora $F(x)=F(x+T)\quad\forall x$ o equivalentemente $\int_0^{x} f(t)dt=\int_0^{x+T} f(t)dt$ e quindi $\int_x^{x+T} f(t)dt=0$. Cioè $f(x)$ deve avere "media nulla". Pertanto se f è T-periodica allora $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt$ é T-periodica $\Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)dt=0$.