

Esercitazione di AC-01 N 9 - 10

Esercitatore: Maristella Petralla

Ricapitolazione

1. Calcolare il numero degli zeri della funzione $z^3 + \sin z$ in $B_2(0)$. Per quali valori di k la funzione $z^k + \sin z$ ammette k zeri in $B_R(0)$? ($k > \frac{R}{\log R}$)

Suggerimento: Osservare che

$$|\sin z| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}.$$

2. Mostrare che

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Sviluppare in Serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

- in $0 < |z| < 1$;
- in $1 < |z| < 2$;
- in $2 < |z| < +\infty$.