Esercitazione di AC01 N 6

Esercitatore: Maristella Petralla

Serie di Laurent

1. Sia $A := \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2 \}$ anello dove r_1, r_2 sono dati positivi.

   (a) Mostrare che la formula di Cauchy
   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\Big)\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}z$$
   é valida sotto le seguenti condizioni: $f \in H(A)$ $r_1' = r_1 + \varepsilon < |z| < r_2 - \varepsilon = r_2'$ e $\gamma_1(t) = r_1' e^{-it}$, $\gamma_2 = r_2' e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

   (b) Mostrare dal primo punto che ogni $f \in H(A)$ puó essere decomposta in una somma $f = f_1 + f_2$ dove f_1 é olomorfa fuori $\bar{D}(0, r_1)$ e $f_2 \in H(D(0, r_2))$. La decomposizione é unica se richiediamo che $f_1(z) \to 0$ per $|z| \to +\infty$.

   (c) Usare questa decomposizione per associare ad ogni $f \in H(A)$la serie di Laurent di centro $z_0 = 0$
   $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$
   che converge a f in A. Mostrare che esiste ed é unica tale serie per ogni f. Mostrare che converge uniformemente su insiemi compatti di A.

   (d) Si puó estendere al caso $r_1 = 0$ (0 $r_2 = \infty$, o ad entrambi)?

   (e) Si puó estendere a regioni limitate da un numero finito di cerchi?

2. Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent di centro l'origine di $\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ in $\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \}$, $\{ z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 3 \}$, $\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| > 3 \}$.
   Suggerimento soluzione: Dette $f_1(z) = \frac{1}{1-z^2}$ e $f_2(z) = \frac{1}{3-z}$, per $|z| < 1$ f_1 e f_2 sono analitiche quindi sviluppabili in serie di Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^(n)(0)}{n!} z^n$; per $1 < |z| < 3$ f_2 é analitica quindi sviluppabile in serie di Taylor e f_1 non é analitica quindi calcoliamo i coefficienti di Laurent tramite la formula $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ con γ qualsiasi curva chiusa e regolare a tratti che é contenuta in A; per $|z| < 3$ f_1 e f_2 non analitiche quindi usiamo la formula per calcolare i coefficienti di Laurent.