Esercitazione di AC-01 N 11 20-05-09

Esercitatore: Maristella Petralla

Riepilogo

1. Verificare che
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2}.$$
Suggerimento: Sia $f(z) = \frac{e^{i\,z}}{z}$ e sia $0 < r < R$ e γ il circuito dato dalle due semicirconferenze superiori di centro l'origine e raggi rispettivamente r e R, e i segmenti $[-R, -r]$ e $[r - R]$. Facciamo tendere $r \to 0$ e $R \to +\infty$. Osservare che $\int_\gamma f(z) \mathrm{d}\, z = 0$ e inoltre $\int_{\gamma_r} f(z) \to -\pi\, i$ e $\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}\, z \to 0$.

2. Sia $a > 1$, verificare che
$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$
Suggerimento: $z = e^{i\,\theta}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$, $a + \cos\theta = a + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^2+2az+1}{2\,z}$ e $\mathrm{d}\,\theta = \frac{-i}{z} \mathrm{d}\, z$. Pertanto
$$I = -i \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\, z}{z^2 + 2\, a\, z + 1} = -i \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\, z}{(z - \alpha)(z - \beta)} = 2\pi Res(f, \alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$
dove γ é la circonferenza unitaria di centro l'origine e $\alpha = -a + (a^2 - 1)^{1/2}$, $|\alpha| < 1$ e $\beta = -a - (a^2 - 1)^{1/2}$, $|\beta| > 1$.