Esecitazione AC01 n.4-A.A. 2008-2009-25/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

1. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Se esiste un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che la funzione $\mathrm{Re} f(z)$ (rispettivamente $\mathrm{Im} f(z)$) abbia un massimo locale in z_0, allora f é costante (é un'applicazione del Principio del Massimo Modulo alla funzione $e^{f(z)}$, rispettivamente $e^{-if(z)}$).

2. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, $a \in U$ e $f \in H(U \setminus \{ a \})$. Sono equvalenti le seguenti

   (a) la funzione f ha una singolaritá eliminabile in a;

   (b) f pu essere estesa ad una funzione olomorfa in tutto U,

   (c) f é limitata in $D(a, \mathbb{R}) \setminus \{ a \}$ per qualche $R > 0$.

   Si prova che se $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$ allora la funzione f ha una singolaritá eliminabile.

3. Provare che ogni f funzione che é meromorfa nel piano esteso é una funzione razionale.