Esecitazione AC01 n.2-A.A. 2008-2009-11/03/09

Esercitatore: Maristella Petralla

Integrali curvilinei

1. Calcolare i seguenti integrali su curve
   (a) $\int_\gamma (\overline{z} + z^2\,\overline{z})\mathrm{d}z$ con $\gamma = \{\, re^{it}\,,\, t \in [0, 2\pi]\}$, $r > 0$;
   (b) $\int_\gamma (5\,z^4 - z^3 + 2)\mathrm{d}z$ con $\gamma(t) = t(1+i)$, $t \in [0, 1]$;
   (c) $\int_\gamma x\mathrm{d}z$, con $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (osserviamo che $x = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(z + \frac{R^2}{z})$);
   (d) $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\mathrm{d}z$, $n \in \mathbb{Z}$, con $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Sia $n \in \mathbb{Z}$,
$$I_n = i\int_0^{2\pi} [2\cos t]^{2n}\mathrm{d}t.$$
Calcolare successivamente I_n usando l'esercizio precedente e la formula del binomio di Newton (ricordare che $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$).

3. Sia $f(\xi) = \xi^2$, $\gamma(t) = z + re^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Calcolare l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$ e verificare che
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

4. Sia $f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^2$, serie di potenze che converge per $|\xi| < R$ $\gamma(t) = z + re^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$, con $z \in B_R(0)$ e r piccolo. Calcolare l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$ e verificare che
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$