

Corso di Analisi Complessa del Prof. Esposito

Tutorato III del 13 – 03 – 2008

Tutori: Filippo Cavallari, Gabriele Nocco

<http://www.matematica3.com>

Esercizio 1

Sia γ un segmento verticale, parametrizzato da $\gamma(t) = z_0 + itc$ con $-1 \leq t \leq 1$, dove z_0 è un numero complesso fissato e c è un numero reale positivo fissato.

Sia $\alpha = z_0 + x$ e $\alpha' = z_0 - x$, dove x è un reale positivo. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha'} \right) dt$$

Esercizio 2

Sia $x > 0$, trovare

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \left(\frac{1}{t + ix} - \frac{1}{t - ix} \right) dt$$

Esercizio 3

Calcolare $\text{Ind}_{\gamma}(z_0)$, dove z_0 è un punto prima esterno e poi interno ai seguenti cammini chiusi γ percorsi in senso orario e antiorario n volte:

1. circonferenza di raggio unitario
2. circonferenza di raggio 2
3. circonferenza di raggio arbitrario
4. quadrato di vertici $0, 1, 1 + i, i$
5. triangolo di vertici $0, 1, i$

Esercizio 4

Sia $f(z) = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, descrivere il raggio di convergenza e provare che $f''(z) = f(z)$.

Esercizio 5

Sia $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)^2}$, descrivere il raggio di convergenza e provare che $z^2 f''(z) + z f'(z) = 4z^2 f(z)$.

Esercizio 6

Sia $f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$, descrivere il raggio di convergenza e provare che $f'(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

Esercizio 7

Sia $f(z) = \sum \frac{-1^n}{(n!)^2} (\frac{z}{2})^{2n}$, descrivere il raggio di convergenza e provare che $z^2 f''(z) z f'(z) + z^2 f(z) = 0$.

Esercizio 8

Per $|z - 1| < 1$, sia $f(z) = \log z = \log(1 + (z - 1)) = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$, verificare che l'espressione della funzione nel disco dato è la stessa e che in quel disco la sua derivata è $\frac{1}{z}$.