I Esonero di AC1 - 16/4/2009

1) [10 punti] Calcolare con il metodo dei residui il valore di

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{1+x^6}dx.$$

2) [10 punti] Sia $f(z) = \frac{z+1}{z^5}\ln(1+z^2)$.
a) Calcolare la parte singolare $Q(z)$ di $f(z)$ in 0;
b) Determinare lo sviluppo in serie di $f_r(z) := f(z) - Q(z)$ in 0 ed il suo raggio di convergenza;
c) Calcolare il valore di

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_r(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

espresso eventualmente come una serie numerica.

3) [10 punti] Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri complessi distinti non nulli, e sia f una generica funzione complessa con singolaritá polari semplici nei punti $a_1, \ldots, a_n$.
a) Determinare la classe delle funzioni $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$ che soddisfano

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{f(z)}{e^z} = c_1, \tag{1}$$

ove $c_1 \in \mathbb{C}$ è un numero non nullo.
b) Determinare la classe delle funzioni $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0, a_1, \ldots, a_n\})$ che soddisfano (1) e

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{e^{\frac{1}{z}}} = c_2, \tag{2}$$

ove $c_2 \in \mathbb{C}$.
c) Se al punto (b) ci restringiamo a considerare $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, i valori c_1 e c_2 possono essere arbitrari?