Appello X di AC1 - 15/9/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Prima di tutto osserviamo che $(z^4-3z^2-4)^2 = (z^2+1)^2(z^2-4)^2$ si annulla in $\pm i$ e ± 2 con molteplicitá 2. Notiamo che solo $\pm i$ e 2 sono interni a $|z-1|=2$. Quindi, dal Teorema dei Residui abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z^4-3z^2-4)^2} &= 2\pi i \left[\left(\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2)^2}\right)'(2) + \left(\frac{1}{(z-i)^2(z^2-4)^2}\right)'(-i) + \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2-4)^2}\right)'(i) \right] \\ &= 2\pi i \left[-2\frac{21}{(20)^3} + 2\frac{9}{(10i)^3} + 2\frac{9}{(-10i)^3} \right] = -\frac{21}{2000}\pi i.\end{aligned}$$

Esercizio 2
Dall'espressione

$$(e^{i\theta}-2)(e^{i\theta}-\frac{1}{2}) = e^{2i\theta} - \frac{5}{2}e^{i\theta} + 1 = -\frac{1}{2}e^{i\theta}[5-4\cos\theta]$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta}{(e^{i\theta}-2)(e^{i\theta}-\frac{1}{2})} = \frac{i}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} \\ &= -\pi \frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

in vista del Teorema dei Residui.

Esercizio 3
Osserviamo che $P_0(z) = (z^4+1)(z-5)$ si annulla nei punti $e^{i\frac{\pi}{4}+2\pi i j}$, $j=0,1,2,3$, e 5. Inoltre, abbiamo che su $\partial B_2(0)$ vale la stima

$$|P_0(z)| \geq (|z|^4-1)(5-|z|) = 45 > 1 = |P(z)-P_0(z)|.$$

Dal Teorema di Rouché abbiamo che $P(z)$ e $P_0(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in su $B_2(0)$. In particolare $P(z)$ ha quattro zeri in $B_2(0)$.