Appello A di AC1 - 3/6/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
In $B_2(0)$ il denominatore ha quattro radici semplici $z_k = -e^{\frac{2\pi i}{3}k}$ per $k = 0, 1, 2$, e $z_3 = 0$. Abbiamo che

$$\text{Res}\ (f, z_k) = \frac{1}{z_k(z_k - 4)} \frac{1}{3z_k^2} = \frac{1}{3(4 - z_k)} \text{ per } k = 0, 1, 2\,, \qquad \text{Res}\ (f, z_3) = -\frac{1}{4}.$$

Dal Teorema dei residui abbiamo quindi che

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-4)(z^3+1)} dz = 2\pi i \left[-\frac{11}{60} + \frac{1}{3(4 - z_1)} + \frac{1}{3(4 - \bar{z}_1)} \right] = 2\pi i [-\frac{11}{60} + \frac{7}{39}].$$

Esercizio 2
Poiché $P(w)$ è un polinomio non costante, abbiamo che $|P(w)| \to +\infty$ per $|w| \to +\infty$. In particolare, esiste $R > 0$ grande tale che $|P(w)| > 10$ se $|w| > R$. Per ipotesi quindi abbiamo che

$$|f(z) - g(z)| \le R \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Dal Teorema di Liouville, otteniamo che $f - g$ è una funzione costante. Quindi, $f(z) = g(z) + c$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed una data costante c.

Esercizio 3
Sia $g(z) = z^5 + 15z^3 - 16z = z(z^2 - 1)(z^2 + 16)$. Osserviamo che $g(z)$ ha esattamente cinque zeri: 0, ± 1 e $\pm 4i$. Abbiamo che

$$|g(z)| \ge |z|(|z|^2 - 1)(16 - |z|^2) = \frac{825}{32} > 1 = |f(z) - g(z)| \quad \text{per } |z| = \frac{3}{2}$$
$$|g(z)| \ge |z|(|z|^2 - 1)(16 - |z|^2) = 1170 > 1 = |f(z) - g(z)| \quad \text{per } |z| = 5.$$

Dal teorema di Rouché segue allora che $f(z)$ e $g(z)$ hanno esattamente lo stesso numero di zeri in $B_{\frac{3}{2}}(0)$ ed in $B_5(0)$, ossia $f(z)$ ha 2 zeri (contati con molteplicitá) in A.