Esonero 1 - MF1

A.A. 2005/2006

1. Utilizzando il criterio del VAN con tasso annuo del 4% dire tra le seguenti operazioni finanziarie quale è la più conveniente

- A) versamento di 6500 € al tempo zero e riscossione semestrale di 30 rate posticipate di 300 € l'una.
- B) versamento di 4000 € al tempo zero e riscossione annuale di 15 rate posticipate di 400 € l'una.

2. Determinare con il metodo bootstrap la curva dei rendimenti dai seguenti dati:

	Cedole	Prezzi	Scadenze
B_1	0	98.5	0.5
B_2	4%	100.5	1

Sia $P_C = 103.4$ € il prezzo di un'obbligazione con scadenza 1 anno, $F = 100$, cedola $c = 6\%$ e pagamenti semestrali. Verificare se si determinano delle opportunità di arbitraggio e, in caso affermativo, descriverle.

3. Si consideri un'opzione call europea con scadenza T e prezzo strike K scritta su azione: dimostrare che in assenza di opportunità di arbitraggio $c_0 \leq S_0$, dove c_0 e S_0 sono rispettivamente il premio dell'opzione ed il valore dell'azione al tempo $t = 0$.

4. Determinare il premio di un'opzione call americana perpetua (ovvero con maturità $T = +\infty$) con prezzo strike K, tasso senza rischio $r > 0$ e valore iniziale del sottostante S_0, in assenza di opportunità di arbitraggio.

5. Si consideri un portafoglio di opzioni ottenuto con una long put con prezzo strike K_1 ed una long call con strike K_2, $K_1 < K_2$, su uno stesso sottostante e medesima maturità T. Si determini il payoff finale ed il valore del portafoglio al tempo $t = 0$.

Assumiamo ora che $S_0 = 8$, $K_1 = K_2 = 10$ €, $T = 0.5$, $r = 10\%$ (composto continuamente) e che il premio per l'opzione put sia $p_0 = 2.5$ €. Determinare il valore iniziale del portafoglio. Se fosse $c_0 = 2$ €, ci sarebbero opportunità di arbitraggio? In caso affermativo, descriverle.

Soluzioni Esonero - MF1

A.A. 2004/2005

1. Il VAN dell'operazione A é dato dalla spesa iniziale piú il valore attuale della rendita posticipata (su 30 periodi, in questo caso semestri) con rata R=300:

$$-6500 + a_{30\rceil i_s} \cdot 300 = -6500 + v_s \frac{1 - v_s^{30}}{1 - v_s} \cdot 300 = 237,08 Euro \tag{1}$$

dove v_s é il fattore di attualizzazione $v_s = (1 + i_s)^{-1}$ e come tasso é stato considerato l'equivalente semestrale del 4% usando la relazione

$$i_s = (1 + i)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,98\%. \tag{2}$$

Il VAN dell'operazione B é dato dalla spesa iniziale piú il valore attuale della rendita posticipata (su 15 anni) con rata 400:

$$-4000 + a_{15\rceil i} \cdot 400 = -4000 + v \frac{1 - v^{15}}{1 - v} \cdot 400 = 447,35 Euro, \tag{3}$$

dove $v = (1 + i)^{-1}$.

Si puó concludere quindi che l'operazione B é preferibile.

2. I fattori di sconto d_1 e d_2 relativi alle scadenze semestrale ed annuale rispettivamente, sono ottenuti risolvendo il sistema

$$100d_1 = 98.5, \quad 2d_1 + 102d_2 = 100.5$$

che dà $d_1 = 0.985$ e $d_2 = 0.966$, da cui $R(0, 0.5) =$ e $R(0, 1) =$.

Il valore della terza obbligazione B_3 coerente con questa struttura a termine è $P_c = 3d_1 + 103d_2 = 102.451 < 103.4$€. Si configura quindi la seguente opportunità d'arbitraggio: si venda allo scoperto l'obbligazione B_3 e si costruisca il portafoglio (di replica) di B_3 con le obbligazioni B_1 e B_2

$$100x + 2y = 3, \quad 102y = 103 \Rightarrow x = 0.01, y = 1.01.$$

Questa strategia permette di guadagnare $103.4 - 102.451$€ al tempo 0 e di annullare il flusso di cassa corrispondente ai tempi 0.5 e 1.

3. Per assurdo, sia $c_0 > S_0$. La strategia ottenuta vendendo l'opzione (short call) e comprando il sottostante (long stock) permette un guadagno immediato ($c_0 - S_0 > 0$) ed un guadagno ulteriore alla maturità ($S_T - \max\{S_T - K, 0\} = \min\{S_T, K\} > 0$).

4. $C_0 = S_0$. Infatti

$$S_0 \geq C_0 \geq c_0 \geq \max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \to_{T \to +\infty} S_0$$

5. Il payoff finale è

$$\begin{cases} K_1 - S_T & S_T \leq K_1 \\ 0 & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2 & S_T \geq K_2 \end{cases}$$

ed il valore iniziale è $p_0 + c_0$. Per la put-call parity si dovrebbe avere $c_0 = 0.987$ € e dunque il valore iniziale del portafoglio è 3.487€. Se fosse $c_0 = 2$€ si creerebbe la seguente opportunità d'arbitraggio: al tempo $t = 0$ si assume la posizione short call + prestito di Ke^{-rT}€ + long put + long stock. In tal modo al tempo $t = 0$ si avrebbe un guadagno positivo, mentre al tempo finale il valore della posizione è 0.