Capitolo 4

Modelli matematici per la valutazione dei derivati: dalla formula CRR alla formula di Black-Scholes

Quanto è ragionevole pagare per entrare in un contratto d'opzione? Per affrontare questo problema occorre specificare un modello matematico per la dinamica del sottostante. Considereremo opzioni europee su azioni, cominciando da un semplice modello per l'andamento dell'azione, il *modello binomiale uniperiodale*, la cui generalizzazione, il *modello binomiale multiperiodale*, dà luogo alla formula di valutazione di Cox - Ross - Rubinstein. Questi modelli sono caratterizzati da una dinamica *discreta* del sottostante, in cui cioè la variazione del valore dell'azione avviene solo in un insieme di istanti di tempo numerabile. Il passaggio dal tempo discreto al tempo continuo ci permetterà di introdurre la famosa formula di Black-Scholes.

4.1 Il modello binomiale uniperiodale

Il mercato che consideriamo è costituito da un'investimento senza rischio caratterizzato da un tasso di interesse r (per fissare le idee, un conto corrente bancario) e da un'azione. L'intervallo di tempo fissato è $[0, T]$, dove T è la maturità dell'opzione:

- il prezzo del titolo privo di rischio è caratterizzato dal seguente processo deterministico
$$B_0 = 1, \quad B_T = 1 + rT,$$

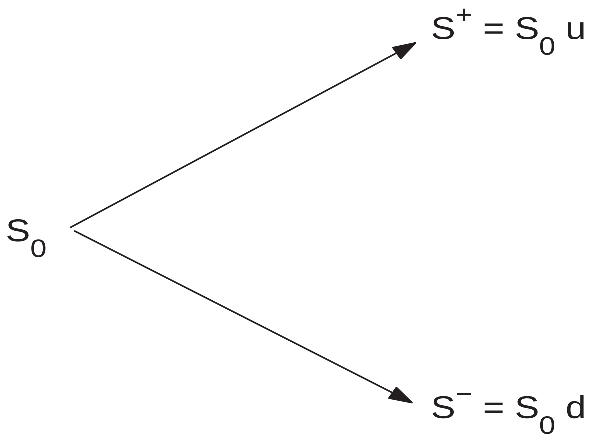

Figura 4.1: Albero binomiale uniperiodale.

dove r è il tasso di rendimento costante per il periodo.

- il prezzo dell'azione è dato dal seguente processo

$$S_0 = s, \quad S_T = \begin{cases} S^+ & \text{con probabilità } p \\ S^- & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

Il valore finale dell'azione può essere scritto come $S_T = sZ$,dove Z è la variabile aleatoria di Bernoulli

$$Z = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p \\ d & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

con $s > 0$ dato, u, d, p costanti positive, $d < u$ e $0 < p < 1$.

Chiameremo questo mercato (B, S).

Introduciamo infine la definizione di opportunità di arbitraggio in tale contesto. Una **opportunità di arbitraggio** è un portafoglio di titoli di mercato $h = (x, y)$ (con x=quantitativo di titoli B e y=quantitativo di titoli S) il cui costo a $t = 0$ è nullo e tale che a $t = 1$:

a) certamente non darà luogo ad una posizione debitoria ;

b) con probabilità non nulla può valere qualcosa.

In simboli, il valore del portafoglio è

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = 0, 1,$$

e in particolare

$$V_0^h = x + ys, \quad V_1^h = (1+r)x + ysZ.$$

Allora si ha un'arbitraggio se $V_0^h = 0$ €, $\text{Prob}(V_1^h \geq 0) = 1$ ed inoltre $\text{Prob}(V_1^h > 0) > 0$.

Esempio 4.1. *Supponiamo che il presso spot dell'azione sia $S_0 = 1$ €, che la scadenza dell'opzione sia 1 settimana e che il tasso d'interesse da applicare sia per questo trascurabile, $r = 0$. Possiamo immaginare che alla scadenza si prospettino i due scenari:*

$$S_T = S^+ = 3, \quad \text{€, oppure} \quad S_T = S^- = 1/2\text{€}.$$

I due broker che agiscono in questo mercato hanno opinioni differenti sui possibili scenari: il broker A assegna una probabilità $p_A = Prob(S_T = S^+) = 0.6$, mentre il broker B $p_B = Prob(S_T = S^+) = 0.1$. Supponiamo che l'opzione disponibile sul mercato abbia un prezzo strike $K = S_0 = 1$ €: se $S_T = S^+ = 3$, il payoff dell'opzione sarà $c_T = c^+ = 2$ €, mentre se $S_T = S^- = 1/2$, l'opzione non sarà esercitata e quindi $c_T = c^- = 0$ €. Un valore ragionevole per il premio è il guadagno atteso alla scadenza,

$$c_0 = pc^+ + (1-p)c^-,$$

ma questa quantità sarà differente per i brokers A e B, che utilizzeranno rispettivamente $p = p_A$ e p_B, ottenendo $c_0^A = 6/5$ e $c_0^B = 1/5$. Faremo però vedere che in entrambi i casi è possibile ottenere un guadagno, per il venditore o l'acquirente, senza rischio, ovvero un arbitraggio.

Proposizione 4.1. *Il modello binomiale a un periodo è libero da opportunità di arbitraggio se e soltanto se*

$$d < (1+r) < u. \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che l'assenza d'arbitraggio $\Rightarrow$ la (4.1). Supponiamo quindi per assurdo che $(1+r) \geq u$. Allora $s(1+r) \geq su$ e di conseguenza $s(1+r) > sd$ poichè $u > d$. Costruiamo quindi un portafoglio $h = (s, -1)$, cioè vendendo allo scoperto il titolo rischioso e investendo tutti i soldi ricavati in quello privo di rischio: al tempo $t = 0$ il valore del portafoglio è $V_0^h = 0$, mentre al tempo finale $T = 1$ $V_1^h = s(1+r) - sZ > 0$ con probabilità 1, poichè $s(1+r) \geq su = S^+ > S^-$. Allo stesso modo, si puo' ottenere un arbitraggio supponendo per assurdo che $(1+r) \leq d$.

Dimostriamo ora che la (4.1) implica l'assenza d'arbitraggio. Consideriamo una possibilità d'arbitraggio $h = (x, y)$, tale che $0 = V_0^h = x + ys$ e cioè $x = -ys$. Usando questa relazione, abbiamo che

$$V_1^h = x(1+r) + yZ = \begin{cases} ys[u - (1+r)], & \text{se } Z = u \\ ys[d - (1+r)], & \text{se } Z = d. \end{cases}$$

Assumiamo che $y > 0$. Allora h è una possibilità d'arbitraggio soltanto se $u \geq 1 + r$ oppure $d \geq 1 + r$: ma questo, per la (4.1), è assurdo. Lo stesso risultato si ottiene se $y < 0$. □

Osserviamo che la condizione $d < 1+r < u$ implica l'esistenza di un unico numero $0 < p^* < 1$ tale che $1 + r = p^*u + (1 - p^*)d$: in altri termini, $1 + r$ può essere espresso come combinazione convessa di u e d. Ma ciò implica che

$$\mathbf{E}^*(S_T) = p^*S^+ + (1 - p^*)S^- = s(p^*u + (1 - p^*)d)) = s(1 + r)$$

ovvero che

$$s = \frac{1}{1 + r}\mathbf{E}^*(S_T).$$

La formula precedente riveste una particolare importanza: ci dice che nel nostro modello (B, S) esiste un'unica probabilità $(p^*, 1 - p^*)$ per la quale il valore dell'azione al tempo $t = 0$ uguaglia la media (attualizzata) dei valori che l'azione avrà al tempo finale T. Abbiamo quindi trasformato il modello in modo tale che la dinamica del bene rischioso sia in realtà come quella del bene non rischioso: si parla infatti di una formula di valutazione *neutrale al rischio*, o più generalmente di un *mondo neutrale al rischio.*

Definizione 4.1.1. *Nel mercato (B, S) una misura di probabilità $(p^*, 1-p^*)$ su $\{u, d\}$ è detta misura neutrale al rischio, o misura di martingala, se*

$$s = \frac{1}{1 + r}\mathbf{E}^*(S_T).$$

E' a questo punto immediato ottenere

$$\begin{cases} p^* & = \frac{(1+r)-u}{u-d} \\ \\ 1 - p^* & = \frac{u-(1+r)}{u-d} \end{cases} \tag{4.2}$$

Possiamo più formalmente dimostrare la seguente

Proposizione 4.2. *Il modello binomiale a un periodo è libero da opportunità di arbitraggio se e soltanto se esiste una misura di probabilità $(p^*, 1 - p^*)$ neutrale al rischio.*

Dimostrazione. Occorre solamente dimostrare la condizione sufficiente. Se esiste una misura neutrale al rischio $(p^*, 1 - p^*)$, avremo

$$s = \frac{1}{1 + r}(S^+p^* + (1 - p^*)S^-) \Longleftrightarrow s(1 + r) = sup^* + sd(1 - p^*)$$

da cui

$$(1+r) = up^* + d(1-p^*).$$

Poichè $0 < p^* < 1$, abbiamo immediatamente che

$$d < 1 + r < u$$

che implica l'assenza di opportunità di arbitraggio. $\square$

Torniamo ora al problema principale della valutazione di un derivato che supponiamo caratterizzato da un payoff finale $c_T = \phi(S_T)$. Consideriamo un arbitrario portafoglio $h = (x, y)$ nel nostro mercato: il suo valore al tempo iniziale è

$$V_0^{(h)} = x + yS_0$$

dove quindi x rappresenta la quantità di denaro investita al tempo iniziale sul titolo senza rischio e y è invece il numero di azioni del titolo rischioso. Cerchiamo, se esiste, quel portafoglio il cui valore al tempo finale T, $V_T^{(h)} = x(1+r) + yS_T$ uguagli quello del derivato : deve essere

$$\begin{cases} x(1+r) + yS^+ & = & \phi(S^+) \\ x(1+r) + yS^- & = & \phi(S^-). \end{cases}$$

Poichè $\det \begin{pmatrix} 1+r & su \\ 1+r & sd \end{pmatrix} = s(1+r)(d-u) \neq 0$, il sistema ammette un'unica soluzione

$$\begin{cases} x^* & = & \frac{\Phi(S^+)S^- - \Phi(S^-)S^+}{(1+r)(S^- - S^+)} \\ \\ y^* & = & \frac{\Phi(S^+) - \Phi(S^-)}{(S^+ - S^-)}. \end{cases}$$

Il portafoglio $h^* = (x^*, y^*)$ *replica* quindi il valore del contratto derivato: affinchè non ci siano arbitraggi il valore iniziale di h^* deve quindi essere lo stesso, ovvero $c_0 = V_0^{(h^*)} = x^* + y^*s$. Inserendo i valori x^* e y^* e riordinando i termini, si ottiene infine

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\Phi(S^+)S^- - \Phi(S^-)S^+}{(1+r)(S^- - S^+)} + \frac{\Phi(S^+) - \Phi(S^-)}{(S^+ - S^-)}s \\ &= \frac{1}{1+r}(\Phi(S^+)p^* + \Phi(S^-)(1-p^*)). \end{aligned}$$

Osserviamo che in questo modo abbiamo non solo ottenuto il valore iniziale del derivato, il premio, ma anche una strategia che permette di *replicare* il valore finale del derivato: il venditore del contratto che incassa c_0 e costruisce il portafoglio h^* è sicuro di poter onorare sempre il contratto, qualsiasi cosa accada al tempo finale.

Riassumiamo il risultato nella seguente

Proposizione 4.3. *Nel mercato (B, S) esiste un unico valore del premio c_0 di un derivato per il quale non si creano opportunità di arbitraggio e tale da permettere la replica del payoff finale del derivato $\Phi(S_T)$, qualunque sia lo scenario che si presenti (S^+, S^-):*

$$c_0 = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^*(\Phi(S_T)) = \frac{1}{1+r}(\Phi(S^+)p^* + \Phi(S^-)(1-p^*)),$$

dove $(p^*, 1-p^*)$ è dato dalla (4.2). Inoltre, il portafoglio di replica $h = (x^*, y^*)$ è

$$\begin{cases} x^* &= \frac{\Phi(S^+)S^- - \Phi(S^-)S^+}{(1+r)(S^- - S^+)} &= \frac{1}{1+r}\frac{u\Phi(ds) - d\Phi(us)}{u-d} \\ \\ y^* &= \frac{\Phi(S^+) - \Phi(S^-)}{(S^+ - S^-)} &= \frac{1}{s}\frac{u\Phi(us) - d\Phi(ds)}{u-d} \end{cases}$$

Nel caso di un'opzione call, il premio è

$$c_0 = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^*(\max\{S_T - K, 0\}) = \frac{1}{1+r}(\max\{S^+ - K, 0\}p^* + \max\{S^- - K, 0\}(1-p^*))$$

mentre per un'opzione put

$$p_0 = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^*(\max\{K - S_T, 0\}) = \frac{1}{1+r}(\max\{K - S^+, 0\}p^* + \max\{K - S^-, 0\}(1-p^*)).$$

4.2 Il modello binomiale multiperiodale di Cox, Ross e Rubinstein - CRR

Il modello binomiale multiperiodale CRR è un modello a tempo discreto dove il tempo è indicizzato con $t = 0, ..., T$ dove T è fissato. Anche in questo caso, consideriamo un mercato costituito da due titoli:

- un titolo privo di rischio il cui prezzo segue la dinamica data da
$$B_0 = 1, \quad B_{t+1} = (1+r)B_t,$$
dove r è il tasso di rendimento costante, per il periodo $[t, t+1]$;
- un titolo rischioso il cui prezzo segue la dinamica data da
$$S_0 = s, \quad S_{t+1} = S_t Z_t,$$
dove s è dato e $Z_t, \forall t = 0, ..., T-1$ sono variabili stocastiche, indipendenti e identicamente distribuite, definite nel seguente modo
$$Z_t = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p \\ d & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$
u, d, p costanti positive e $d < u$.

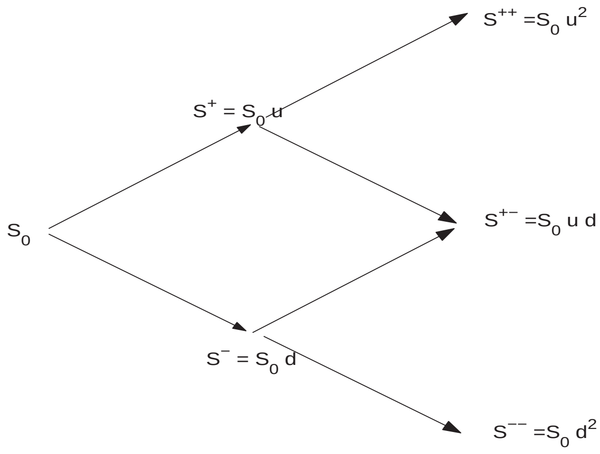

Figura 4.2: Albero binomiale ricombinante.

La dinamica del prezzo del titolo rischioso può dunque essere rappresentata per mezzo di un albero ricombinante. Il valore del prezzo del titolo al tempo t può essere scritto come

$$S_t = su^k d^{t-k}, k = 0, ..., t$$

dove k è la realizzazione di una variabile binomiale Y e indica quante volte le variazioni del prezzo del titolo hanno assunto il valore u. Quindi, ad ogni nodo dell'albero binomiale viene associata la coppia (t, k) con $k = 0, ..., t$.

Una *strategia di portafoglio* è una sequenza

$$h_t = \{(x_t, y_t), t = 1, \ldots, T\}$$

di variabili aleatorie che dipendono da $S_0, \ldots, S_{T-1}$ (si assume che $h_0 = h_1$). Il corrispondente valore del portafoglio h è

$$V_t^h = x_t(1 + r) + y_t S_t, t = 1, \ldots, T.$$

I valori x_t e y_t sono dunque rispetivamente le quantità del titolo senza rischio e del titolo rischioso detenute nel periodo $[t-1, t)$. Una strategia di portafoglio è detta *autofinanziante* se la condizione

$$x_t(1 + r) + y_t S_t = x_{t+1} + y_{t+1} S_t$$

vale per ogni $t = 0, \ldots, T - 1$. Ciò significa che ad ogni tempo t non c'è ingresso o uscita di denaro dal portafoglio.

Una **opportunità di arbitraggio** è un portafoglio autofinanziante tale che $V_0^h = 0$ €, Prob$(V_T^h \geq 0) = 1$ e Prob$(V_T^h > 0) > 0$.

In generale è possibile dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 4.4. *Un mercato è libero da opportunità di arbitraggio se e solo se esite una misura di probabilità P^* equivalente a P tale che*

$$S_t = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^*(S_{t+1}|S_t).$$

*Una tale misura è detta **misura di martingala equivalente** o **neutrale al rischio**.*

Consideriamo ora un derivato caratterizzato da un payoff finale $X_T = \Phi(S_T)$, dove Φ -*funzione contratto*- è una data funzione reale. Per esempio $\Phi(s) = \max\{s - K, 0\}$, $\Phi(s) = \max\{K - s, 0\}$ sono le funzioni contratto per le call e le put europee. Un derivato X è detto *replicabile* se esiste un portafolio autofinanziante h tale che

$$V_T^h = X_T.$$

In tal caso, h è detto *portafoglio di replica* o *di copertura (hedging portfolio)*. Se tutti i derivati possono essere replicati, il mercato si dice **completo**.

La nozione di completezza di un mercato finanziario è estremamente importante per la valutazione dei derivati: infatti, se il mercato è completo è assolutamente naturale che in assenza di oppurtunità di arbitraggio, il valore di un qualsiasi derivato uguagli il valore del corrispondente portafoglio di replica:

$$X_t = V_t^h, t = 0, \ldots, T.$$

Per il modello binomiale multiperiodale è possibile dimostrare la seguenti affermazioni:

1. la condizione $d < 1 + r < u$ è necessaria e sufficiente per l'assenza di opportunità d'arbitraggio;

2. le probabilità neutrali al rischio (o di martingala equivalente) sono date da:
$$\begin{cases} q_u = \frac{(1+r)-u}{u-d} \\ \\ q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}; \end{cases} \tag{4.3}$$

3. il modello CRR è completo.

Vediamo quindi come è possibile valutare un derivato in tale modello:

Proposizione 4.5 (Formula di Cox, Ross e Rubinstein). *In assenza d'arbitraggio, il prezzo al tempo $t = 0$ di un derivato semplice $X = \Phi(S_T)$ è dato da*

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E^*[\Phi(S_T)], \tag{4.4}$$

dove il valore atteso è calcolato rispetto alla misura P^* neutrale al rischio. Più esplicitamente

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} \Phi\left(su^k d^{T-k}\right). \tag{4.5}$$

dove q_u e q_d sono definite come in (4.3).

Dimostrazione. Per dimostrare questa proposizione utilizziamo il modello binomiale a un periodo. Quindi l'assenza d'arbitraggio implica che $d < 1+r < u$. Cerchiamo, anche in questo caso, un portafoglio di replica h del derivato X in modo tale che il prezzo del derivato uguagli il valore del portafoglio e cioè

$$X_t = V_t^h, \forall t = 0, ..., T.$$

Se chiamiamo $V_t(k)$ il valore del portafoglio al nodo (t, k) dell'albero della dinamica del sottostante, allora, usando la proposizione (4.3), possiamo calcolare $V_t(k)$ ricorsivamente nel seguente modo

$$\begin{cases} V_t(k) = \frac{1}{1+r}\left(q_u V_{t+1}(k+1) + q_d V_{t+1}(k)\right) \\ \qquad\qquad V_T(k) = \Phi\left(su^k d^{T-k}\right) \end{cases} \quad t = 0, \dots T, k = 0, \dots t, \tag{4.6}$$

dove le probabilità neutrali al rischio q_u e q_d sono date da (4.3) e quindi il portafoglio di replica al tempo $t-1$ è

$$\begin{cases} h_B(k) &= \frac{1}{1+r}\frac{uV_t(k) - dV_t(k+1)}{u-d}, \\ h_S(k) &= \frac{1}{S_{t-1}}\frac{V_t(k+1) - V_t(k)}{u-d}. \end{cases}$$

In particolare, il prezzo del derivato è dato da $V_0(0)$. Dalla (4.6), abbiamo che

$$X_0 = V_0(0) = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} \Phi\left(su^k d^{T-k}\right).$$

Osserviamo che

$$X = \Phi(S_T) = \Phi(su^Y d^{T-Y}),$$

dove Y ha una distribuzione binomiale. Quindi, abbiamo

$$X_0 = \frac{1}{(1+r)^T} E^*[\Phi(S_T)].$$

□

4.3 La formula di Black-Scholes

La formula di Cox, Ross e Rubinstein permette di determinare il premio di un opzione europea con prezzo strike K e maturità T (ma anche, come vedremo, di una americana), suddividendo l'intervallo temporale della vita del contratto in N sottointervalli di medesima ampiezza e assumendo un modello dinamico di evoluzione del sottostante di tipo binomiale. In particolare, per essere usata, è necessario stabilire i valori di u e d. In questo paragrafo vedremo come, facendo crescere il numero di periodi all'infinito e aggiustando opportunanmente i valori di r, u e d, si può giungere alla formula di Black-Scholes. Storicamente infatti, la teoria di valutazione dei derivati introdotta da Black e Scholes è precedente al modello CRR, che ne costituisce una semplificazione.

Supponiamo di dividere l'intervallo temporale $[0, T]$ in N sottoperiodi di ampiezza $\Delta t = \frac{T}{N}$, nei quali il comportamento del bene sottostante segue un modello binomiale multiperiodale di Cox, Ross e Rubinstein. Supponiamo che:

- $r = r_N$ con $r_N = \frac{RT}{N}$. La costante $R > 0$ prende il nome di *tasso istantaneo d'interesse.*
- $u = u_N$ e $d = d_N$, dove

$$\begin{aligned} u_N &= \left(1 + \tfrac{RT}{N}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}, \\ d_N &= \left(1 + \tfrac{RT}{N}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

  e $\sigma > 0$ è la volatilità del sottostante.

Osservazioni.

1. Il modello è privo d'arbitraggio; infatti, poiché $\sigma > 0$ si ha

$$d_N < 1 + r_N < u_N.$$

2. La probabilità neutrale al rischio che indicheremo con $p^* = q_N$ e $1 - q_N$ rispettivamente è data da

$$\begin{aligned} q_N &= \frac{\left(1+\frac{RT}{N}\right)-d_N}{u_N-d_N} = \frac{1-e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}-e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}, \\ 1-q_N &= \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}-1}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}-e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Proposizione 4.6. *Sia N un intero fissato: il valore scontato del sottostante al tempo T, sotto la probabilità neutrale al rischio, è dato da*

$$\frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_T = S_0 e^{\sum_{j=1}^N X_j^{(N)}},$$

dove $X_j^{(N)}$, $\forall j = 1, ..., N$ sono variabili indipendenti e identicamente distribuite, definite da

$$X_j^{(N)} = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \textit{con probabilità } q_N \\ -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \textit{con probabilità } 1-q_N \end{cases} \tag{4.9}$$

Dimostrazione. Riscriviamo $\frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_T$ nel seguente modo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_T &= \frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_T \frac{S_0}{S_0} \cdot ... \cdot \frac{S_{j\frac{T}{N}}}{S_{j\frac{T}{N}}} \cdot ... \frac{S_{(n-1)\frac{T}{N}}}{S_{(n-1)\frac{T}{N}}} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_0 \frac{S_{\frac{T}{N}}}{S_0} \frac{S_{2\frac{T}{N}}}{S_{\frac{T}{N}}} \cdot ... \cdot \frac{S_T}{S_{(n-1)\frac{T}{N}}} \\ &= S_0 \prod_{j=1}^N \frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)} Z_j^{(N)}, \end{aligned}$$

dove, $\forall j = 1, ..., N$ e N fissato, le variabili $Z_j^{(N)}$ sono indipendenti, identicamente distribuite e definite come

$$Z_j^{(N)} = \frac{S_{j\frac{T}{N}}}{S_{(j-1)\frac{T}{N}}} = \begin{cases} u_N & \text{con probabilità } q_N \\ d_N & \text{con probabilità } 1-q_N \end{cases}$$

Quindi, abbiamo

$$\frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} S_T = S_0 e^{\sum_{j=i}^N X_j^{(N)}},$$

dove $X_j^{(N)} = \ln\left(\frac{Z_j^{(N)}}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)}\right)$, $\forall j = 1, ..., N$. Infine, per la (4.7)

$$X_j^{(N)} = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \text{con probabilità } q_N \\ -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \text{con probabilità } 1 - q_N \end{cases}$$

□

Osservazioni. Al variare di $N \in \mathbb{N}$, le variabili $\left\{X_j^{(N)}\right\}_{j=1}^{N}$ sono indipendenti ma non sono identicamente distribuite. In particolare costituiscono un *array triangolare*:

$$\begin{array}{llll} X_1^{(1)} & & & \\ X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & & \\ \vdots & & & \\ X_1^{(N)} & \cdots & \cdots & X_N^{(N)} \end{array}$$

Proposizione 4.7. *Sia N fissato. Il valore atteso $\mu_N = \mathbf{E}(X_j^{(N)})$ e la varianza $\sigma_N^2 = var(X_j^{(N)})$ $\forall j = 1, ..., N$, sotto la probabilità neutrale al rischio, sono tali che*

$$\begin{array}{rcl} \lim_{N\to\infty} N\mu_N & = & -\frac{\sigma^2 T}{2} \\ \lim_{N\to\infty} N\sigma_N^2 & = & \sigma^2 T. \end{array} \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Calcoliamo direttamente la media e la varianza

$$\begin{aligned} \mu_N = E\left[X_j^{(N)}\right] &= \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}q_N - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}(1-q_N) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}(2q_N - 1), \\ \sigma_N^2 = Var\left[X_j^{(N)}\right] &= E\left[\left(X_j^{(N)}\right)^2\right] - E^2\left[X_j^{(N)}\right] \\ &= \sigma^2\frac{T}{N}q_N + \sigma^2\frac{T}{N}(1-q_N) - \sigma^2\frac{T}{N}(2q_N-1)^2 \\ &= 4\sigma^2\frac{T}{N}q_N(1-q_N). \end{aligned}$$

Osserviamo che, tramite uno sviluppo in serie, abbiamo

$$\frac{1-e^{\pm x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{x \pm \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{2x + o(x^2)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}x + o(x), \tag{4.11}$$

che implica, sostituendo $x = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$,

$$2q_N - 1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}}), \quad \lim_{N\to\infty} q_N = \lim_{N\to\infty}(1-q_N) = \frac{1}{2},$$

da cui seguono le (4.10):

$$\lim_{N\to\infty} N\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}(2q_N-1) = \sigma^2 T \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{N}{\sigma T}}(2q_N-1) = -\frac{\sigma^2 T}{2},$$

$$\lim_{N\to\infty} N4\sigma^2\frac{T}{N}q_N(1-q_N) = \sigma^2 T.$$

□

Abbiamo bisogno ora del seguente risultato:

Teorema 4.3.1 (Teorema del limite centrale per array triangolari). *Sia* $\left\{Y_j^{(N)}\right\}_{j=1}^N$, $N \geq 1$ *una successione di variabili indipendenti tali che* $\forall j = 1, ..., N$

$$\begin{array}{lll} \mu_N = E\left[Y_j^{(N)}\right] < \infty & e & N\mu_N \overset{N\to\infty}{\to} \mu \in \mathbb{R} \\ \sigma_N^2 = Var\left[Y_j^{(N)}\right] < \infty & e & N\sigma_N^2 \overset{N\to\infty}{\to} \sigma^2 \in \mathbb{R}^+. \end{array}$$

Allora per ogni funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua e limitata*

$$\lim_{N\to\infty} E\left[f\left(\sum_{j=1}^N Y_j^{(N)}\right)\right] = E\left[f(Y)\right],$$

dove $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Dimostrazione. Sia $\phi_{Y^{(N)}}(t)$ la funzione caratteristica della variabile $Y^{(N)} = \sum_{j=1}^N Y_j^{(N)}$. Dunque poichè le $Y_j^{(N)}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite

$$\phi_{Y^{(N)}}(t) = \mathbf{E}(\exp(it\sum_{j=1}^N Y_j^{(N)})) = \prod_{j=1}^N \mathbf{E}(\exp(itY_j^{(N)})) = \mathbf{E}(\exp(itY_1^{(N)}))^N.$$

Dallo sviluppo di Taylor otteniamo in $t = 0$

$$\exp(itY_1^{(N)}) = 1 + i\frac{t}{N}(NY_1^{(N)}) - \frac{t^2}{2N^2}(N^2(Y_1^{(N)})^2) + o(\frac{t^2}{N^2}) =$$

da cui facendo il valore atteso e considerando che $E\left[Y_1^{(N)}\right] = \mu_N$ e $E\left[(Y_1^{(N)})^2\right] = \sigma_N^2 + \mu_N^2$ otteniamo

$$\mathbf{E}(\exp(itY_1^{(N)})) = 1 + \frac{itN\mu_N - t^2N\sigma_N^2/2}{N} - \frac{t^2}{2N^2}(N^2\sigma_N^2) + o(\frac{t^2}{N^2}).$$

Dunque, per ogni t

$$\lim_{N\to+\infty}\phi_{Y^{(N)}}(t) = \lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{itN\mu_N - t^2N\sigma_N^2/2}{N} - \frac{t^2}{2N^2}(N\mu_N)^2 + o(\frac{t^2}{N^2})\right)^N$$

$$= \exp(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}) = \phi_Y(t)$$

dove $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dal Teorema (4.4.1) segue la tesi. □ □

In particolare, per le variabili del nostro modello, ciò implica il seguente

Corollario 4.1. *Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata*

$$\lim_{N\to\infty} E\left[f\left(\sum_{j=1}^{N} X_j^{(N)}\right)\right] = E\left[f(X)\right],$$

dove $X \sim N\left(-\sigma^2 T/2, \sigma^2 T\right)$.

Consideriamo ora, un'opzione put europea con prezzo strike K e maturità T. Il prezzo $p_t = \Pi(t)$ al tempo $t = 0$, per la (4.4), è dato da

$$p_0^{(N)} = \frac{1}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} E^Q\left[\max\left(K - S_T, 0\right)\right]. \tag{4.12}$$

Teorema 4.3.2.

$$\lim_{N\to\infty} p_0^{(N)} = p_0,$$

dove

$$p_0 = e^{-RT}KN[-d_2] - S_0N[-d_1],$$

con $N[x]$ funzione di distribuzione di una $N(0,1)$ e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la (4.12) e per la Proposizione (4.6), il prezzo al tempo $t = 0$ della put europea è dato da

$$p_0^{(N)} = E^Q\left[\max\left(\frac{K}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} - S_0 e^{\sum_{j=1}^N X_j^{(N)}}, 0\right)\right] = E^Q\left[f\left(X_j^{(N)}\right)\right],$$

con $\left\{X_j^{(N)}\right\}$ variabili indipendenti e tali che vale la proposizione (4.7). Inoltre,$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \max\left(\frac{K}{\left(1+\frac{RT}{N}\right)^N} - S_0 e^x, 0\right)$ è una funzione continua e limitata. Quindi, possiamo applicare il Teorema (4.3.1) ottenendo che

$$p_0 = \lim_{N\to\infty} E^Q\left[f\left(\sum_{j=1}^N X_j^{(N)}\right)\right] = E^Q\left[\max\left(e^{-RT}K - S_0 e^X, 0\right)\right], \qquad (4.13)$$

dove $X \sim N\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)$. Notiamo che abbiamo usato il fatto che $\left\{K\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N}\right\}_N$ è una successione di numeri reali tale che

$$\lim_{N\to\infty} K\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N} = Ke^{-RT}.$$

A questo punto, calcoliamo la media a destra della relazione (4.13). Osserviamo che possiamo scrivere $X = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}Y$ dove $Y \sim N(0,1)$, e quindi

$$\begin{aligned} P_0 &= E\left[\max\left(e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}Y}, 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}y}, 0\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy. \end{aligned}$$

Ora la disuguaglianza

$$e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}y} \geq 0$$

è soddisfatta se e soltanto se

$$-RT + \ln K \geq \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}y$$

ovvero

$$y \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(-\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - RT + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) = -d_2.$$

Quindi p_0 è uguale a

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}y}\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &= \frac{e^{-RT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}y} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &= e^{-RT}KN[-d_2] - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)^2}\, dy. \end{aligned}$$

Con un cambio di variabile si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{1}{2}\left(y-\sigma\sqrt{T}\right)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = N[-d_1],$$

con $-d_1 = -d_2 + \sigma\sqrt{T}$, da cui la tesi. $\square$

Utilizzando la relazione di parità put-call,

$$c_0 - p_0 = S_0 - Ke^{-RT}$$

e sfruttando le proprietà della funzione di distribuzione normale, $N[-x] = 1 - N[x]$, abbiamo il seguente

Corollario 4.2.

$$\lim_{N\to\infty} c_0^{(N)} = c_0$$

dove

$$c_0 = S_0 N[d_1] - e^{-RT} K N[d_2],$$

con $N[x]$ *funzione di distribuzione di una* $N(0,1)$ *e*

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right) \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right). \end{aligned}$$

La formula ora ottenuta è nota come la **formula di Black - Scholes**: fornisce il valore del premio per un contratto di opzione call (put) di tipo europeo in funzione dei dati contrattuali T e K, dei dati di mercato S_0 e R e di un parametro che caratterizza la variabilità del rendimento sottostante, la volatilità σ,

$$c_0 \equiv c(0, S_0, K, T, R, \sigma).$$

Osserviamo che, essendo gli altri parametri S_0 e R noti o accessibili direttamente da osservazioni di mercato, l'applicazione della formula di Black-Scholes richiede solo la stima della volatilità σ, che è effettuata con tecniche statistiche su serie storiche o mediante l'inversione (numerica) della funzione prezzo $c(0, S_0, K, T, R, \sigma)$ a partire dai prezzi osservati. In tal caso si definisce *volatilità implicita* quel valore σ^* tale che

$$\hat{c}_0 = c(0, S_0, K, T, R, \sigma^*)$$

dove $\hat{c}_0$ è il prezzo di mercato dell'opzione con maturità T, strike K, prezzo spot S_0 e tasso risk-free istantaneo R.

Esempio 4.2. *Consideriamo una put europea con i seguenti dati:* $S_0 = 50$€*,* $K = 50$€*,* $r = 10\%$ *(composto continuamente) e* $T = 3$ *mesi. Data una volatilità* $\sigma = 30\%$*, il premio dell'opzione secondo la formula Black-Scholes è*

$$p_0 = Ke^{-rT}N[-d_2] - S_0N[-d_1]$$

con

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(\frac{S_0}{K}) + (R - \frac{\sigma^2}{2})T) = \frac{1}{0.3\sqrt{0.25}}(\ln(\frac{50}{50}) + (0.1 - \frac{0.3^2}{2}).25) = 0.09,$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} = 0.24$$

da cui segue

$$N[-d_2] = N[-0.09] = 0.46, \quad N[-d_1] = N[-0.24] = 0.40$$

che implicano

$$p_0 = 50e^{-0.1\cdot 0.25} \cdot 0.46 - 50 \cdot 0.40 = 2.43\text{€}.$$

□

Il valore di un contratto europeo, call o put, in un istante di tempo intermedio, $0 \leq t \leq T$ è dato rispettivamente da

$$c_t = S_tN[d_1(t)] - Ke^{-r(T-t)}N[d_2(t)], \tag{4.14}$$

$$p_t = Ke^{-r(T-t)}N[-d_2(t)] - S_tN[-d_1(t)] \tag{4.15}$$

dove

$$\begin{array}{rcl} d_2(t) & = & \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)) \\ d_1(t) & = & d_2(t) + \sigma\sqrt{T-t} \end{array} \tag{4.16}$$

4.3.1 Le lettere greche e l'equazione di Black-Scholes

Sia $c(t, x, K, T-t, r, \sigma)$ la funzione prezzo di un'opzione call di tipo europeo. Le derivate di c rispetto a queste variabili sono estremamente importanti per lo studio delle proprietà del valore della call. Si definiscono in particolare

- $\delta(t) = \frac{\partial}{\partial x}c(t, x, K, T-t, r, \sigma)$, Delta;
- $\Gamma(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}c(t, x, K, T-t, r, \sigma)$, Gamma;
- $\Theta(t) = \frac{\partial}{\partial t}c(t, x, K, T-t, r, \sigma)$, Theta;

- $V(t) = \frac{\partial}{\partial\sigma} c(t, x, K, T - t, r, \sigma)$, Vega;
- $\rho(t) = \frac{\partial}{\partial\rho} c(t, x, K, T - t, r, \sigma)$, Rho;

Per convenienza notazionale indicheremo d'ora in poi con $c(t, S_t$ il valore della call europea $c(t, x, K, T-t, r, \sigma)$ poichè focalizzeremo il nostro interesse alle derivate parziali rispetto alle due variabiil x e S_t. Poniamo inoltre $x = S_t$ ed esplicitiamo la dipendenza dei valori d_1 e d_2 dalle variabili (t, x), $d_1(t, x)$, $d_2(t, x)$. E' possibile allora dimostrare la seguente

Proposizione 4.8. *Sia $c(t, x)$ il valore di un'opzione call europea nel modello di Black-Scholes, con maturità T e prezzo strike K. Allora*

$$\begin{aligned}
\delta(t, x) &= N[d_1(t, x)] \\
\Gamma(t, x) &= N'[d_1(t, x)] \tfrac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} = \tfrac{\exp -(d_1^2(t,x)/2)}{\sqrt{2\pi}} \tfrac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\
\Theta(t, x) &= -\Big(\tfrac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}} (\tfrac{\exp -(d_1^2(t,x)/2)}{\sqrt{2\pi}}) + rKe^{-r(T-t)} N[d_2(t, x)] \Big)
\end{aligned}$$

Esplicitiamo ora la relazione che intercorre tra le greche ora calcolate: si ha

$$\Theta(t, x) + rx\delta(t, x) + \frac{1}{2} x^2\sigma^2\Gamma(t, x) = rc(t, x).$$

Infatti

$$-\frac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}} (\frac{\exp -(d_1^2(t, x)/2)}{\sqrt{2\pi}}) - rKe^{-r(T-t)} N[d_2(t, x)] + rxN[d_1(t, x)] +$$

$$\frac{1}{2} x^2\sigma^2 \frac{\exp -(d_1^2(t, x)/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} = r(xN[d_1(t, x)] - rKe^{-r(T-t)} N[d_2(t, x)]).$$

Abbiamo quindi dimostrato che il valore $c(t, x)$ di una call europea nel modello di Black-Scholes soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali (PDE) di tipo parabolico, a coefficienti non lineari

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c(t, x) + rx\frac{\partial}{\partial x} c(t, x) + \frac{1}{2} x^2\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c(t, x) = rc(t, x), & (t, x) \in (0, t) \times (0, +\infty) \\ c(T, x) = \max\{x - K, 0\}, & \forall x \geq 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

L'equazione (4.17) è chiamata *equazione di Black-Scholes.* Si può in realtà dimostrare che l'unica soluzione $u(t, x)$ di (4.17) dove T, K, r e σ sono costanti assegnate è

$$u(t, x) = xN[d_1(t, x)] - rKe^{-r(T-t)} N[d_2(t, x)]$$

ovvero il valore di opzione europea al tempo t in cui il valore del sottostante è $S_t = x$.

4.3.2 Il modello dinamico a tempo continuo e la valutazione neutrale al rischio

Abbiamo ottenuto la formula di Black-Scholes come limite del valore di un'opzione call (put) nel modello binomiale multiperiodale CRR. Una conseguenza delle proprietà del modello considerato è la caratterizzazione della dinamica del sottostante: abbiamo in particolare (Corollario (4.1)) che

$$\frac{S_T}{e^{-rT}} = S_0 e^X$$

dove $X \sim N(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T)$ che possiamo riscrivere come

$$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma B_T}$$

dove $B_T \sim N(0,T)$. Puo' essere in realtà dimostrato più precisamente che nel limite $N \to +\infty$, la dinamica del sottostante tende in legge per ogni $t \in [0,T]$ ad una variabile aleatoria

$$S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t}$$

dove B_t è un processo stocastico noto come *moto Browniano* o *processo di Wiener*.

Definizione 4.3.1. *Un processo stocastico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ si dice un moto Browniamo o processo di Wiener, se*

1. $B_0 = 0$ *con probabilità* 1*;*
2. *per ogni* $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$*, gli incrementi del processo*

$$B_{t_1} - B_{t_0}, \quad B_{t_2} - B_{t_1}, \quad \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

   sono variabili aleatorie indipendenti;

3. *per ogni* $0 \leq s < t$*, la variabile aleatoria*

$$B_t - B_s$$

   è una gaussiana di valore atteso $\mathbf{E}(B_t - B_s) = 0$ *e varianza* $var(B_t - B_s) = t - s$*: la sua densità di probabilità è dunque*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{x^2}{2(t-s)}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che il valore della call europea è dato da

$$c(t,x) = xN[d_1(t,x)] - Ke^{-r(T-t)}N[d_2(t,x)] = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}(\max\{S_T - K, 0\})$$

dove $x = S_t$ e $S_T = S_t \exp((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t))$. La probabilità sotto cui S_T ha la legge ottenuta (come limite nel modello CRR) si chiama *probabilità (o misura) neutrale al rischio.* Abbiamo in questo modo ottenuto una *rappresentazione* della soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali (4.17) come valore atteso di una funzione (il $\max\{S_T - K, 0\}$) di un processo stocastico (il moto browniano geometrico S_T). Tale processo è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\mathbf{E}(S_t) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t}\mathbf{E}(e^{\sigma B_t}) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t}\mathbf{E}(e^{\sigma\sqrt{t}Z})$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Poichè $\mathbf{E}(e^{xZ}) = e^{x^2/2}$, si ha

$$\mathbf{E}(S_t) = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma^2 t/2} = S_0 e^{rt}.$$

Sotto la misura neutrale al rischio, il valore atteso del sottostante si comporta come un bene *senza rischio*, il cui rendimento (relativo) $R_t = (S_t - S_0)/S_0$ atteso è

$$\mathbf{E}(R_t) = \mathbf{E}\left(\frac{S_t - S_0}{S_0}\right) = e^{rt} - 1.$$

Concludiamo questa sezione osservando che la tecnica di valutazione delle opzioni europee può essere estesa (nell'ambito di questo modello) ad un qualsiasi altro derivato il cui payoff finale sia $\phi(S_T)$, il cui valore al tempo t è quindi

$$\Pi(t,\Phi) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}(\phi(S_T))$$

dove $S_T = S_t \exp((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t))$.

Esempio 4.3. *Consideriamo un contratto forward su un bene sottostante il cui valore, sotto la misura neutrale al rischio, segua un moto browniano geometrico, $S_T = S_t \exp((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t))$. Poichè il payoff finale è $\Phi(S_T) = S_T - K$, abbiamo, come prima*

$$f_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}(S_T - K) = e^{-r(T-t)}(S_t e^{(r-\sigma^2/2)t}\mathbf{E}(e^{\sigma\sqrt{t}Z}) - K) = S_t - e^{-r(T-t)}K,$$

dove K è il prezzo di consegna. Inoltre $f_0 = 0$, che implica $S_0 - e^{-rT}K = 0$, da cui otteniamo $K = S_0 e^{rT}$.

4.4 Richiami

Variabili aleatorie, processi stocastici e martingale. Dato una spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una variabile aleatoria (reale) è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile, tale cioè che $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, per ogni boreliano $B \subset \mathbb{R}$.

La funzione $F_X(x) = P(X \leq x)$ si definisce *funzione di distribuzione* della variabile aleatoria X. Una variabile aleatoria si dice *assolutamente continua* se esiste una funzione f, *densità*, tale che,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Il valore atteso di X è definito come

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

se $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$, mentre la varianza è

$$\mathrm{var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2,$$

se $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Più in generale, per una variabile aleatoria assolutamente continua si ha che

$$\mathbf{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

se $\mathbf{E}(|h(X)|) < +\infty$.

Dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, un *processo stocastico* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, è una famiglia di variabili aleatorie $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ parametrizzata da un indice t che interpretiamo come un tempo, $t \in \mathbb{R}^+$. Un processo può quindi essere visto come una funzione di due variabili, (t, ω): per ogni fissato t, $X(\cdot)_t$ è dunque una variabile aleatoria, mentre per ogni fissato ω, $X(\omega)_\cdot$ è una funzione di t che chiamiamo *traiettoria* del processo.

Una *filtrazione* $\mathcal{F}_t$ è una famiglia di sotto σ-algebre di $\mathcal{F}$ non decrescente, i.e. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ per ogni $s < t$. Ad un processo possiamo generalmente associare una filtrazione *naturale*, ovvero $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ la più piccola σ-algebra rispetto alla quale X_s è misurabile, per $s \in [0, t]$. Uno spazio di probabilità filtrato è uno spazio di probabilità con una filtrazione, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$: un processo stocastico si dice *adattato* alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ se X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni $t \geq 0$.

Se $t \in \mathbb{N}$, il processo $X_t = X_n$, $n \in \mathbb{N}$, si dice processo discreto.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ uno spazio di probabilità filtrato: un processo stocastico X_t si dice una *martingala* se per ogni $t \geq 0$ $\mathbf{E}(|X_t|) < +\infty$ e

$$\mathbf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$$

o, nel caso di processi discreti

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$$

dove $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ è il valore atteso condizionato rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}$ di X.

Le funzioni caratteristiche Sia X una variabile aleatoria reale definita su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotata di densità f. Si definisce *funzione caratteristica* di X la funzione a valori complessi

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx.$$

Osserviamo che

$$|\phi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| f_X(x)dx \leq 1.$$

Vale il seguente

Teorema 4.4.1. *Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una successione di variabili aletorie e sia $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ la corrispondente successione delle funzioni caratteristiche. Se esiste $\phi(t) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t)$ e se $\phi(t)$ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria reale X, allora per ogni funzione F continua e limitata*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(F(X_n)) = \mathbf{E}(F(X)).$$