Capitolo 2

Security markets

Il tasso di interesse caratterizza il valore del denaro: se prendo in prestito 1 € oggi, fra un anno dovrò restituire $1 + r$ €. Il mercato del denaro, ovvero il mercato nel quale il bene che viene scambiato è il denaro stesso, è sicuramente uno dei tipi di mercato più sviluppati e consolidati. Esistono infatti strumenti finanziari che permettono di scambiare denaro in modi anche complessi: obbligazioni (bill, bond, notes, annuities), contratti futures, mutui (mortgage). Gli strumenti finanziari direttamente legati ai tassi di interesse e contrattati in un mercato che a fronte di un pagamento iniziale garantiscono un *reddito fissato* distribuito su un insieme di tempi prestabiliti, vengono generalmente chiamati *fixed income securities*.

2.1 Il modello matematico di mercato: arbitraggio e prezzi

Introduciamo ora un modello matematico per un mercato fixed-income, per un tempo fissato (p.e. $t = 0$). In questo mercato sono contrattati N prodotti differenti su T date prestabilite $t_1 < t_2 < \cdots < t_T$. Ciascun prodotto è caratterizzato da un prezzo π_i e da un flusso di cassa $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{iT}$. Possiamo quindi rappresentare il mercato mediante una coppia $(\underline{\pi}, C)$, dove $\underline{\pi} \in \mathbb{R}^N$ e $C \in \mathbb{R}^{N \times T}$. Gli elementi c_{ij} rappresentano quindi la quantità di denaro scambiata al tempo j-esimo per il prodotto i-esimo: se $c_{ij} > 0$ si tratta di un incasso, se $c_{ij} < 0$ di un pagamento.

Definizione 2.1. *Un portafoglio è descritto da un vettore* $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^T$*:* $\theta_i > 0$ *corrisponde ad una posizione lunga (long position)* $\theta_i < 0$ *ad una posizione corta (short position).*

La posizione lunga è realizzata con un acquisto, mentre la posizione corta da una vendita allo scoperto. Il valore del portafoglio è dato da $\underline{\pi} \cdot \underline{\theta} = \underline{\pi}^{\mathrm{T}} \underline{\theta} = < \underline{\pi}, \underline{\theta} >$ ed il flusso di cassa corrispondente è $C^{\mathrm{T}} \underline{\theta}$.

Introduciamo la seguente notazione, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

- $\underline{x} \geq 0$ se $x_i \geq 0$ per ogni i;
- $\underline{x} > 0$ se $x_i \geq 0$ e $x_j > 0$ per almeno un indice j;
- $\underline{x} \gg 0$ se $x_i > 0$ per ogni i: scriveremo in questo caso $\underline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Definizione 2.2. *Un portafoglio $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^T$ rappresenta una opportunità di arbitraggio se e solo se verifica una delle due condizioni seguenti:*

1. $\underline{\pi} \cdot \underline{\theta} = 0$ *e* $C^T \underline{\theta} > 0$*;*
2. $\underline{\pi} \cdot \underline{\theta} < 0$ *e* $C^T \underline{\theta} \geq 0$*.*

Lemma 2.1. *(Lemma di Stiemke). Sia $A \in \mathbb{R}^{N \times T}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^N$. Solo una delle seguenti alternative si realizza:*

1. *esiste un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^T_{++}$ tale che $A\underline{x} = \underline{y}$;*
2. *esiste un vettore $\underline{z} \in \mathbb{R}^N$ tale che $\underline{z} \cdot \underline{y} \leq 0$ e $\underline{z}^T A \geq 0$ con almeno una disuguaglianza stretta (equivalentemente $(-\underline{z} \cdot \underline{y}, \ \ \underline{z}^T A) > 0$).*

Possiamo quindi dimostrare il seguente teorema che caratterizza i mercati privi di opportunità di arbitraggio (*arbitrage-free*):

Teorema 2.1. *Il mercato $(\underline{\pi}, C)$ è privo di opportunità di arbitraggio se e solo se esiste un vettore $\underline{d} \in \mathbb{R}^T_{++}$ tale che $\underline{\pi} = C\underline{d}$.*

Osservazione. Le componenti del vettore $\underline{d}$ sono chiamate *fattori di sconto* (*discount factors*): in un mercato privo di opportunità di arbitraggio i prezzi di ciascun prodotto sono determinati come valore presente del corrispondente flusso di cassa, dove $\mathrm{PV}(c_{ij}) = c_{ij} d_j$ ed i fattori di sconto sono gli stessi per ogni prodotto nel mercato. Non si considera quindi un unico tasso di interesse r costante nel tempo per il quale si avrebbe (con composizione periodale degli interessi) $\mathrm{PV}(c_{ij}) = c_{ij}/(1+r)^j$.

Dimostrazione. Basta osservare che la condizione di opportunità di arbitraggio corrisponde all'esistenza di un vettore $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^T$ che soddisfa la condizione 2 del Lemma di Stiemke: infatti $(-\underline{\theta} \cdot \underline{\pi}, \ \ \underline{\theta}^{\mathrm{T}} C) > 0$ equivale alla coppia di condizioni

1. $\underline{\theta} \cdot \underline{\pi} = 0$ e $\underline{\theta}^{\mathrm{T}} C > 0$;

2. $\underline{\theta} \cdot \underline{\pi} < 0$ e $\underline{\theta}^{\mathsf{T}} C \geq 0$.

In assenza di opportunità di arbitraggio deve quindi valere la prima alternativa del Lemma: esiste un vettore $\underline{d} \in \mathbb{R}^T_{++}$ tale che $C\underline{d} = \underline{\pi}$. □

Per affrontare il problema dell'unicità dei fattori di sconto occorre introdurre il concetto di completezza del mercato:

Definizione 2.3. *Il mercato $(\underline{\pi}, C)$ è completo se e solo se per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^T$ esiste un portafoglio $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^N$ tale che $\underline{x} = C^{\mathsf{T}}\underline{\theta}$.*

In un mercato completo un qualsiasi prodotto caratterizzato dal flusso di cassa $\underline{x}$ può essere *replicato* con una opportuna combinazione - il portafoglio $\underline{\theta}$ - degli N prodotti fissati. Ciò è possibile se, in termini algebrici, le righe di C generano $\mathbb{R}^T$ e dunque C deve avere T righe indipendenti. La condizione $N \geq T$ è quindi necessaria per la completezza del mercato.

Teorema 2.2. *Si assuma che il mercato $(\underline{\pi}, C)$ sia privo di opportunità di arbitraggio e $N \geq T$. Allora il mercato è completo se e solo se esiste un unico vettore di fattori di sconto $\underline{d}$.*

Dimostrazione. Sia $(\underline{\pi}, C)$ un mercato completo: la matrice C ha dunque T righe indipendenti e quindi anche T colonne indipendenti in $\mathbb{R}^N$. L'equazione $C\underline{x} = \underline{y}$ ha dunque al più una soluzione. Poiche' d'altra parte sappiamo che per l'assenza di opportunità di arbitraggio l'equazione $C\underline{d} = \underline{\pi}$ ha almeno una soluzione, ne segue che $\underline{d}$ deve essere unica.

Viceversa, supponiamo per assurdo che il mercato sia incompleto. Non ci sono T colonne della matrice C indipendenti e quindi esiste un vettore $\underline{\tilde{x}} \neq 0$ tale che $C\underline{x} = 0$. Scegliendo opportunamente $\epsilon > 0$ abbiamo che il vettore $\tilde{\underline{d}} = \underline{d} + \epsilon\underline{\tilde{x}} \gg 0$ e soddisfa $\underline{\pi} = C\tilde{\underline{d}}$. Ma ciò contraddice l'ipotesi di unicità del vettore dei fattori di sconto. □

Definiamo l'insieme $\mathcal{A} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^T : \underline{x} = C^{\mathsf{T}}\underline{\theta},\ \underline{\theta} \in \mathbb{R}^N\}$: un flusso di cassa $\underline{x} \in \mathcal{A}$ si dice *replicabile.* Sia inoltre $\mathcal{D}_\pi = \{\underline{d} \in \mathbb{R}^T_{++} : \underline{\pi} = C\underline{d}\}$: per un mercato privo di opportunità di arbitragggio, il Teorema precedente afferma che c'è completezza ($\mathcal{A} = \mathbb{R}^T$) se e solo se $|\mathcal{D}_\pi| = 1$.

Osserviamo che se il mercato non è completo, il prezzo di un arbitrario flusso di cassa $\underline{x}$ non è in generale unico: si avrà infatti un insieme di prezzi (comunque di non arbitraggio) corrispondenti agli elementi di $\mathcal{D}_\pi$, $\pi(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \underline{d}$, con $\underline{d} \in \mathcal{D}_\pi$. Vale tuttavia il seguente

Corollario 2.1. *Sia $\underline{x} \in \mathcal{A}$. In assenza di opportunità di arbitraggio, $\pi(\underline{x}) = \underline{\theta} \cdot \underline{\pi}$.*

Dimostrazione. Sia $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^N$ tale che $\underline{x} = C^{\mathrm{T}}\underline{\theta}$:

$$\pi(\underline{x}) = \underline{x} \cdot \underline{d} = C^{\mathrm{T}}\underline{\theta} \cdot \underline{d} = \underline{\theta} \cdot C\underline{d} = \underline{\theta} \cdot \underline{\pi}.$$

□

2.2 Le obbligazioni

Un'*obbligazione* è un contratto fra due controparti: una, l'emittente (in genere uno Stato, ma anche grandi aziende o istituti di credito), riceve dall'altra, l'acquirente, una certa somma di denaro in cambio della promessa di un futuro flusso di cassa (*cash flow*). Nel nome stesso è sottinteso l'obbligo alla restituzione del prestito. Le regole che disciplinano tempi e modalità dell'emissione, dell'acquisto, dello scambio e della tassazione sui guadagni delle obbligazioni variano da nazione a nazione e non verranno qui esaminate o discusse. Chi acquista oggi un'obbligazione, acquista il diritto di ricevere a certe date future fissate un importo certo. Questo tipo di prodotti rientrano quindi nella tipologia *fixed - income*.

Esistono due tipologie principali di obbligazioni nel mercato *fixed income*:

- obbligazioni senza cedole o a sconto, *zero – coupon bonds*,
- obbligazioni con cedole, *coupon (bearing) bonds*.

Le obbligazioni senza cedole promettono al possessore di ricevere ad un certo tempo futuro T, detto *scadenza* o *maturita'*, una somma di denaro F detta *principale* (*principal*) o *valore facciale* (*face value*).

Le obbligazioni con cedole promettono invece il pagamento di un certo numero noto di importi fissi C dette *cedole* (*coupons*) a tempi prefissati fino alla maturita' T in cui si riceve inoltre anche il valore facciale F. Il flusso di cassa promesso all'acquirente è dunque completamente specificato, sia nei tempi che nelle quantità.

Il rendimento di un'obbligazione deriva quindi dagli interessi che l'emittente paga al possessore del titolo sotto forma di cedole e/o del valore facciale.

Esempio 2.1. *Oggi posso comprare un titolo di stato italiano senza cedole (BOT - Buono Ordinario del Tesoro) che mi promette la restituzione di* 100 € *fra 1 anno a fronte di un pagamento attuale di* 97.78 €*. Il rendimento a scadenza e' dunque* $\frac{100-97.78}{97.78} = 0.0227$*, ovvero* 2.27% *(al lordo delle tasse).*

Le obbligazioni, in teoria, sono considerate investimenti privi di rischio, perché, diversamente da altri, le date e gli importi dei pagamenti futuri sono noti a priori. Ciò non è vero in realtà. Esistono, infatti, diversi tipi di rischio:

Rating	Giudizio
AAA	probabilita' di default estremamente basse
AA	probabilita' di default molto basse
A	probabilita' di default basse
BBB	bassa probabilita' di default, possibile deterioramento in circostanze avverse
BB	possibili incertezze nella capacita' di rimborso, specie in circostanze avverse
B	visibili elementi di possibile vulnerabilita'
CCC	vulnerabilita' dipendente da favorevoli condizioni economiche e finanziarie
CC	grande vulnerabilita'
C	e' in atto un'azione di recupero, ma i pagamenti proseguono
D	situazione di mancato pagamento (default)

Tabella 2.1: I ratings principali di Standard & Poor's

1. rischio di fallimento - *risk of default*: l'emittente non effettua completamente i pagamenti promessi. In generale, i titoli emessi hanno un diverso rischio di non essere rimorsati a scadenza: si va da una sostanziale certezza di essere rimorsati per i titoli emessi da Stati dei paesi piu' economicamente sviluppati a probabilita' di rimborso decrescenti per emittenti meno solidi. L'affidabilita' dei titoli quotati nel mercato e' misurata da societa' specializzate, le *agenzie di rating*, che assegnano a ciascun titolo un voto o *rating*. A rating peggiore corrisponde una maggiore probabilita' di default. La classificazione di Standard & Poor's e' riportata in Tabella 1.

   I titoli con rating AAA, AA, A sono caratterizzati da basso rischio e hanno dunque in genere un basso rendimento. Al crescere del rischio aumenta chiaramente il rendimento: si parla in questo caso di obbligazioni di tipo speculativo.

2. rischio di mercato - *market risk*: mentre il rimborso alla maturita' e' fissato ad F, il valore del titolo *prima* della scadenza puo' variare: se ad esempio i tassi di interesse sul mercato salgono, un titolo che offre un rendimento inferiore al tasso ottenibile necessariamente perde di valore ed il suo prezzo scende. Il rischio di mercato sorge principalmente da movimenti indesiderati nei prezzi e nei tassi, potendo dunque provocare una perdita monetaria. Si può distinguere tra il *rischio assoluto* che misura la perdita in termini monetari della posizione e il *rischio relativo* che indica il mancato guadagno relativamente ad un indice di mercato.

Nel seguito si considereranno obbligazioni con un rischio di fallimento generalmente assunto come trascurabile.

Indicando con $P(t, T)$ il prezzo al tempo t di un'obbligazione con maturita' T, si ha evidentemente che $P(T, T) = F$. Il problema centrale che vogliamo affrontare e' dunque quello di caratterizzare il prezzo $P(t, T)$ per $t < T$ e di studiare il corrispondente mercato.

2.2.1 Rendimenti e la struttura a termine dei tassi

Un'obbligazione senza cedole è un contratto che garantisce al possessore di ricevere al tempo T, detto scadenza o maturità (*maturity*), una certa somma fissata di denaro F detta principale o valore facciale. Poniamo

$$P(t, T) = \text{prezzo al tempo } t \text{ di uno zero coupon con maturità T},$$

$$P(T, T) = F = \text{valore facciale o principale (in genere è } F = 100€\text{)}.$$

Si osservi che

$$P(t, T) < P(T, T) = F \quad \forall\, t \in [0, T]$$

Infatti, pur essendo aleatorio il prezzo nel generico istante t, successivo all'emissione, nessuno sarebbe disposto a spendere più di F per riavere poi tale quantità al tempo T.

In un mercato in cui sono contrattati più bonds, i relativi prezzi non possono essere fissati arbitrariamente, ma sono collegati l'un l'altro. Queste relazioni tra i prezzi devono sottostare ad alcune regole affinché nel mercato non sorgano possibilità di arbitraggio.

Consideriamo dunque il caso di due obbligazioni con scadenze diverse $T^{(1)} < T^{(2)}$. Sicuramente sarà $P(T^{(1)}, T^{(1)}) = P(T^{(2)}, T^{(2)}) = 100€$, ma cosa possiamo dire riguardo alla relazione che intercorre fra i loro prezzi nel generico istante t? E a $t = 0$? Una risposta a queste domande è nella seguente:

Proposizione 2.1. *In assenza di arbitraggio, per due obbligazioni senza cedole tali che $T^{(1)} < T^{(2)}$ si ha sempre*

$$P(t, T^{(1)}) > P(t, T^{(2)}) \quad \forall\ 0 \leq t \leq T^{(1)} < T^{(2)}. \tag{2.1}$$

Osservazione. Per ottenere la proprietà di monotonia del prezzo in assenza di opportunità di arbitraggio occorre utilizzare un portafoglio non più *statico*, come nella Sezione precedente, ma *dinamico*: si deve infatti poter modificare la composizione del portafoglio al variare del tempo T.

Dimostrazione. Si dimostra la disuguaglianza (2.1) facendo vedere come possano emergere opportunità di arbitraggio qualora non si verifichi con la creazione di un opportuno portafoglio $\mathcal{P}$ composto dai due titoli. Supponiamo, quindi, per assurdo che sia $P(t, T^{(1)}) \leq P(t, T^{(2)})$.

Costruiamo il seguente portafoglio: al tempo t si vende allo scoperto 1 obbligazione con maturità $T^{(2)}$ e si acquistano

$$\alpha = \frac{P(t, T^{(2)})}{P^{(1)}(t, T^{(1)})} \geq 1$$

obbligazioni con maturità $T^{(1)}$. Possiamo identificare queste posizioni con il vettore $\underline{\theta}_t = (\alpha, -1)$. Il valore del portafoglio è:

$$v_t(\mathcal{P}) = \alpha P(t, T^{(1)}) - P(t, T^{(2)}) = 0.$$

Al tempo $T^{(1)}$ il flusso di cassa è chiaramente αF: possiamo dunque acquistare 1 obbligazione con maturità $T^{(2)}$ essendo

$$\alpha F - P(T^{(1)}, T^{(2)}) > \alpha F - F \geq 0$$

poichè $\alpha \geq 1$ e $P(T^{(1)}, T^{(2)}) < F$. Infine, a $T^{(2)}$, si riceve il valore facciale delle obbligazioni con maturità $T^{(2)}$ e si chiude la posizione della vendita allo scoperto pagando $P(T^{(2)}, T^{(2)}) = F$. Il valore del portafoglio è dunque

$$v_{T^{(2)}}(\mathcal{P}) = P(T^{(2)}, T^{(2)}) - P(T^{(2)}, T^{(2)}) = 0.$$

In questo modo si e' ottenuto un arbitraggio, che conclude la proposizione.

□

L'acquisto di un'obbligazione senza cedole, a fronte di un pagamento iniziale pari a $P(0, T)$, assicura un'entrata pari a $P(T, T) = F$ al tempo T . Questo vuol dire che il valore futuro, alla scadenza T, della somma di denaro con la quale si è acquistata l'obbligazione è pari al valore facciale. Indicando con R il rendimento annuale nel periodo $[t, T]$, si ha che

$$FV(P(t, T)) = P(t, T)e^{R \cdot (T-t)} = F,$$

avendo usato la capitalizzazione in tempo continuo. Con capitalizzazioni in tempo discreto si ha invece

$$FV(P(t, T)) = P(t, T)(1 + R(T - t)) = F.$$

Indichiamo d'ora in poi con $d(t, T)$ il prezzo dello zero-coupon con valore facciale $F = 1$€. La funzione $d(t, T)$ sarà detta *funzione di sconto*. Segue dunque

$$d(t,T) = e^{-R\cdot(T-t)} \quad \text{(cap. continua)}, d(t,T) = \frac{1}{1+R(T-t)} \quad \text{(cap. discreta)}. \tag{2.2}$$

Da queste equazioni si ricava il valore di R, che dipende dal momento t in cui lo si calcola e dalla maturità T dell'obbligazione. Tale valore è detto *rendimento a maturità* (*yield to maturity*) dell'obbligazione. Il termine al denominatore $T-t$ è detto *vita residua* (*time to maturity*) dell'obbligazione:

$$R = -\frac{\log d(t,T)}{T-t}, \quad R = \frac{1-d(t,T)}{d(t,T)(T-t)}. \tag{2.3}$$

Se si prendono i prezzi al tempo t (ad esempio leggendoli su un quotidiano) di tutte le obbligazioni senza cedole presenti al momento sul mercato, si possono ottenere i corrispondenti valori di R e graficarli in funzione di T, ottenendo così la cosiddetta *curva dei rendimenti per scadenza* o *yield curve*.

In generale dunque possiamo assumere che il rendimento su base annua nel periodo $[t,T]$ sia una funzione $R(t,T)$ delle variabili t e T, legato al prezzo dello zero-coupon dalle relazioni

$$d(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad d(t,T) = \frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}.$$

La funzione

$$R(t,T) = -\frac{\log d(t,T)}{T-t} \tag{2.4}$$

è anche definita *tasso spot composto continuamente* per il periodo $[t,T]$.

Introduciamo ora altre importanti quantità. Dalla (2.1) si ottiene

$$\frac{d(t,T^{(1)})}{d(t,T^{(2)})} > 1 \quad \forall t < T^{(1)} < T^{(2)}$$

da cui

$$\log\frac{d(t,T^{(1)})}{d(t,T^{(2)})} = \log d(t,T^{(1)}) - \log d(t,T^{(2)}) > 0.$$

Definiamo il *tasso forward* relativo all'intervallo $[T^{(1)},T^{(2)}]$ come

$$R(t,T^{(1)},T^{(2)}) \stackrel{def}{=} -\frac{\log d(t,T^{(1)}) - \log d(t,T^{(2)})}{T^{(1)} - T^{(2)}} \tag{2.5}$$

Il suo significato finanziario è quello di tasso di rendimento per uno zero coupon bond emesso a $T^{(1)}$ con scadenza $T^{(2)}$ visto dal tempo t.

Osserviamo che il tasso forward $R(t, T^{(1)}, T^{(2)})$ stabilisce un legame tra i valori della funzione di sconto (i prezzi di zero-coupons) a scadenze differenti:

$$d(t, T^{(1)}) = d(t, T^{(2)}) e^{-R(t, T^{(1)}, T^{(2)})(T^{(2)} - T^{(1)})}.$$

Passando al limite per $T^{(2)} \to T^{(1)}$ e assumendo la differenziabilità di $d(t, \cdot)$ per ogni t, si ottiene:

$$f(t, T^{(1)}) \stackrel{def}{=} \lim_{T^{(2)} \to T^{(1)}} R(t, T^{(1)}, T^{(2)}) = -\frac{\partial \log d(t, T^{(1)})}{\partial T} \tag{2.6}$$

che è detto *tasso forward istantaneo*. Il suo significato è quello di tasso di rendimento istantaneo per uno zero coupon bond emesso a $T^{(1)}$ con vita residua infinitesima. Ciò implica al contrario che

$$d(t, T) = e^{\int_t^T f(t,s) ds}. \tag{2.7}$$

Infine, dalla (2.4), passando al limite per $T^{(1)} \to t$ si ottiene

$$r = r(t) \stackrel{def}{=} \lim_{T^{(1)} \to t} R(t, T^{(1)}) \tag{2.8}$$

detto *tasso a breve* (*short rate*). Inoltre, dato che $d(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, si ha

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds$$

e dunque

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t, T) = \lim_{T \to t} \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds = f(t, t). \tag{2.9}$$

Per un fissato tempo $t < T$, le quantità $d(t, T)$, $R(t, T)$ e $f(t, T)$, viste come funzioni della maturità, si dicono *strutture a termine dei tassi d'interesse* (*term structure of interest rates*) e la conoscenza di una di queste funzioni permette di ricavare le altre.

2.2.2 Obbligazioni con cedole

In questo tipo di obbligazioni l'acquirente, oltre a ricevere al tempo T il valore facciale, ha diritto a ricevere dei pagamenti, le cedole C (tipicamente indicate come una percentuale del valore facciale, $C = cF, c \in (0, 1)$), di entità ed a scadenze prestabilite nel contratto (in genere sono pagate semestralmente o annualmente). Per questo motivo non è più valida la Proposizione (2.1): infatti il prezzo può salire oltre il valore facciale, per tenere in considerazione il flusso di cassa positivo generato, e la (2.2) deve essere modificata per includere anche le cedole. Definiamo il flusso di cassa associato all'obbligazione nel modo seguente: siano $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ le date di pagamento delle cedole con $t_n = T$, allora

Definizione 2.4. Il *vettore flusso di cassa* Φ=(ϕ_1, ..., ϕ_n), per un'obbligazione con maturità T e cedole C, è un vettore di $\mathbb{R}^n_+$ tale che l'i-esima componente ϕ_i rappresenta il pagamento che si riceve al tempo t_i

$$\phi_i = \begin{cases} C & \text{se } t_i \text{ corrisponde ad una scadenza cedolare} \\ \\ C + F & \text{se } t_i \text{ corrisponde alla maturità } t_n \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il flusso di cassa di un coupon bond risulta dunque lo stesso di un portafoglio di $n+1$ zero-coupon con scadenze $t_1, \ldots, t_n$ e valori nominali C per $i = 1, \ldots, n-1$ e $C+F$ per $i = n$, i cui prezzo sono

$$P_i(t, t_i) = \phi_i e^{-R(t,t_i)(t_i - t)}, i = 1, \ldots, n.$$

Indicando con:

$P_C(t,T)$=prezzo al tempo t di un'obbligazione con maturità T (si pone il simbolo C a pedice per indicare che l'obbligazione paga delle cedole);

C=valore della cedola scritto come percentuale del principale;

t_i=tempo in cui è pagata la cedola i-esima;

t_n=T, maturità;

$PV(\Phi)$ = valore attualizzato del flusso di cassa Φ;

in assenza di opportunità di arbitraggio, i valori del coupon bond e del portafoglio di zero-coupons devono essere uguali: dunque si ha (cap. continua)

$$P_C(t,T) = PV(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i e^{-R(t,t_i)(t_i - t)} =$$

$$= F e^{-R(t,T)(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} C e^{-R(t,t_i)(t_i - t)} \tag{2.10}$$

oppure (cap. discreta)

$$P_C(t,T) = PV(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \frac{1}{(1 + R(t,t_i)(t_i - t))} =$$

$$\frac{F}{(1 + R(t,T)(T - t))} + \sum_{i=1}^{n} C \frac{1}{(1 + R(t,t_i)(t_i - t))}. \tag{2.11}$$

Da un punto di vista modellistico è dunque sufficiente specificare i prezzi degli zero-coupon, o la yield curve, per ricavare poi i valori dei coupon bond tramite le (2.10 e 2.11).

Esempio 2.2. *Si consideri la seguente struttura a termine:*

T	0.5	1	1.5	2
$R(0,T)$	1.8%	2.4%	2.8%	3%

Il valore di un coupon bond con scadenza $T = 2$*, cedole (annuale)* $c = 4.5\%$*, pagamenti semestrali è* $P_C(0,2) = 102.879$.

Nella pratica si pone tuttavia il problema inverso di *stimare* la curva dei rendimenti $R(t,T)$ a partire dai prezzi di mercato (le osservazioni) dei bond quotati per un ampio range di maturità. Sfortunatamente i zero-coupon hanno maturità che in generale arrivano ad un anno e dunque per ottenere informazioni sulla curva dei rendimenti per scadenze più lunghe (si può arrivare fino a 30 anni) occorre utilizzare anche i prezzi osservati dei coupon bond che pero' sono legati in modo *non lineare* a $R(t,T)$. Vedremo nel paragrafo seguente una tecnica di uso comune per la stima della yield curve.

Se si attualizzano tutti i pagamenti cedolari allo stesso tasso $R(t,t_i) \equiv R \ \ \forall i$, otteniamo le equazioni non lineari in R

$$P_C(t,T) = Fe^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} Ce^{-R\cdot(t_i-t)},$$

oppure, assumendo che il tasso discreto R sia relativo all'intervallo di tempo tra due pagamenti cedolari consecutivi $[t_i, t_{i+1}]$

$$P_C(t,T) = \frac{F}{(1+R)^n} + \sum_{i=1}^{n} C \frac{1}{(1+R)^i}.$$

Il valore di R che realizza l'uguaglianza è chiaramente il TIR del flusso di cassa generato dal coupon bond. In generale non e' possibile risolvere analiticamente tali equazioni, ma si deve ricorrere a metodi di approssimazione numerica (p.e. il metodo di Newton–Rapson) per determinare il valore R.

2.2.3 Duration e duration modificata.

Consideriamo il prezzo di un'obbligazione con coupon in funzione del tasso di rendimento interno R:

$$P_C(t,T) = Fe^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} Ce^{-R\cdot(t_i-t)}.$$

Derivando rispetto alla variabile R otteniamo

$$-\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = (T-t)Fe^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} C(t_i-t)e^{-R\cdot(t_i-t)}$$

e dividendo per $P_C(t,T) > 0$ possiamo definire la quantità

$$D(t,T) = -\frac{1}{P_C(t,T)}\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = (T-t)\frac{Fe^{-R\cdot(T-t)}}{P_C(t,T)} + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t)\frac{Ce^{-R\cdot(t_i-t)}}{P_C(t,T)} \tag{2.12}$$

che viene chiamata *duration*. Osserviamo che D ha la dimensione di un tempo e che per uno zero-coupon si ha

$$D(0,T) = T\frac{Fe^{-R\cdot T}}{P(0,T)} = T.$$

La duration D è dunque una media ponderata dei tempi di pagamento t_i con pesi pari al rapporto tra il valore attuale dell'i-esimo pagamento ed il valore attuale di tutto il flusso di cassa (ovvero il prezzo dell'obbligazione). La somma dei pesi è pari ad 1.

Dalla (2.12) si ha

$$\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = -D(t,T)P_C(t,T);$$

in prima approssimazione possiamo quindi affermare che il tasso di variazione del prezzo del titolo, conseguente ad una piccola variazione del rendimento, è pari al prodotto della duration cambiata di segno per la variazione del rendimento,

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -D(t,T)\Delta R$$

dove $\Delta P_C(t,T)$ rappresenta il rapporto incrementale del prezzo rispetto alla variabile rendimento R.

Assumendo una composizione periodale degli interessi si può facilmente dimostrare che se R è il rendimento composto annualmente, la relazione precedente diventa

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -\frac{D(t,T)\Delta R}{1+R}$$

e più in generale, se la composizione di R è su m periodi,

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -\frac{D(t,T)\Delta R}{1+R/m}.$$

La quantità

$$D^*(t,T) = \frac{D(t,T)}{1+R/m}$$

è chiamata a volte *duration modificata* (*modified duration*).

La duration è una misura ampiamente utilizzata per realizzare strategie di copertura (*immunizzazione*) in portafogli obbligazionari.

2.2.4 La determinazione della struttura a termine dei tassi d'interesse: il metodo bootstrap.

Uno dei principali problemi nei mercati dei tassi di interesse consiste nel ricavare la struttura a termine dei tassi *implicata* dai prezzi osservati dei bond. Poichè il momento dell'osservazione t è fissato, ometteremo nel seguito la dipendenza delle funzioni considerate dal tempo t che possiamo assumere nullo, $t = 0$: l'unica variabile di interesse è dunque la scadenza. Supponiamo di avere i prezzi di N obbligazioni, $P_1, \dots, P_N$, che ordiniamo per maturità crescenti: ognuna di queste è caratterizzata da un flusso di cassa Φ_i, con cedola $C_i, i = 1, \dots N$ (per uno zero-coupon assumiamo che $C = 0$) e da un insieme di scadenze (i temi di pagamento delle cedole) $t_1^{(i)}, \dots, t_{n_i}^{(i)}$, dove $t_k^{(i)}$ è il k-esimo tempo di pagamento dell'i-esima obbligazione. Per semplicità di notazione, possiamo ordinare tutte queste scadenze in senso crescente, ottenendo un unico insieme di tempi $t_1, \dots, t_T$ (scartando ovviamente i "doppioni").

Il prezzo di una generica obbligazione è dato quindi dalla (2.10), che riscriviamo in termini della funzione di sconto, valutata negli istanti $t_i, i = 1, \dots, T$,

$$P_C(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i d(t,t_i).$$

Abbiamo in sostanza costruito un mercato $(\underline{\pi}, C)$, con $\pi_i = P_i$ e $c_{ij} = \phi_j^{(i)}$, $i = 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, N$. Il nostro obiettivo è di determinare i fattori di sconto $d(t_j) = d(0, t_j)$ dai prezzi osservati: in virtù della Proposizione 2.1 possiamo inoltre assumere che, in assenza di opportunità di arbitragio,

$$d(0) = 1 > d(t_1) > \ldots > d(t_T) > 0. \tag{2.13}$$

Si tratta dunque di risolvere il problema lineare

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} d(t_1) \\ d(t_2) \\ \vdots \\ d(t_T) \end{pmatrix}$$

dove C è la matrice $N \times T$

$$C = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & \cdots & \phi_{n_1}^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} & \cdots & \phi_{n_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(N)} & \phi_2^{(N)} & \cdots & \phi_{n_N}^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Sappiamo dai risultati delle Sezione 2.1 che l'esistenza della soluzione del sistema è equivalente alla condizione di assenza di opportunità di arbitraggio e che l'unicità di questa soluzione è equivalente alla completezza del mercato. Purtroppo, se si considerano tutte le obbligazioni quotate giornalmente sul mercato dei titoli di stato il numero di incognite è generalmente molto maggiore del numero di equazioni, $T \gg N$, condizione che rende incompleto il mercato e mal condizionato il problema numerico.

Si cerca quindi di ovviare a tale problema utilizzando varie tecniche. Uno dei metodi certamente più utilizzati è il cosiddetto *metodo bootstrap* che consiste nel determinare un sottoinsieme delle N obbligazioni con la seguente struttura: ogni tempo di pagamento cedolare di un'obbligazione corrisponde alla scadenza di un'altra (unica) obbligazione del sottoinsieme. La corrispondente matrice $\tilde{C}$ diventa quindi triangolare inferiore, con elementi diagonali $c_{ii} \neq 0$ ed il sistema lineare così ottenuto è facilmente risolvibile (backward substitution):

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(N_k)} & \phi_2^{(N_k)} & \cdots & \phi_{n_{N_k}}^{(N_k)} \end{pmatrix}.$$

I valori così ottenuti dei fattori di sconto possono quindi essere interpolati linearmente per ottenere la (stima della) funzione di sconto $d(T)$ e, con le opportune trasformazioni, la curva dei rendimenti e/o del tasso forward. Il principale svantaggio di tale tecnica sta nel fatto che sottoinsiemi di obbligazioni con tali caratteristiche non si riescono generalmente a costruire per scadenze medio - lunghe.

Esempio 2.3. *Si considerino i seguenti dati di mercato:*

	Cedole	*Prezzi*	*Scadenze*
B_1	0	99	0.5
B_2	3.5%	101	0.8
B_3	8%	105	1
B_4	4%	102	1.5

Cerchiamo di determinare con il metodo bootstrap la curva dei rendimenti. I tempi di pagamento sono $t_1 = 0.3$, $t_2 = 0.5$, $t_3 = 0.8$, $t_4 = 1$ e $t_5 = 1.5$ (in anni) e dunque le incognite sono $d(t_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. Il sistema lineare corrispondente è quindi

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 101 \\ 105 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 1.75 & 0 & 101.75 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 104 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0.3) \\ d(0.5) \\ d(0.8) \\ d(1) \\ d(1.5) \end{pmatrix}.$$

Occorre ridurre il sistema "eliminando" il secondo coupon bond in modo da ottenere un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite $d(0.5)$, $d(1)$ e $d(1.5)$:

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 105 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 4 & 104 & 0 \\ 2 & 2 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0.5) \\ d(1) \\ d(1.5) \end{pmatrix},$$

la cui soluzione è

$$d(0.5) = 0.99, \quad d(1) = 0.971, \quad d(1.5) = 0.966$$

da cui segue la curva dei rendimenti

$$R(0, 0.5) = 0.020, \quad R(0, 1) = 0.029, \quad R(0, 1.5) = 0.023.$$