

ESERCIZIO 1. Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissati, sia

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

l'equazione di un'elica che al variare di $t \in \mathbb{R}$ si avvolge sul cilindro circolare retto in \mathbb{R}^3 di equazione $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Calcolare curvatura e torsione della curva $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ e osservare che non dipendono da t .
2. Dimostrare che una curva in \mathbb{R}^3 ha curvatura e torsione costanti se e solo se è contenuta in una retta, in un cerchio o in un'elica cilindrica.

ESERCIZIO 2. Quali delle seguenti applicazioni $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

1. $\mathbf{X}(u, v) = (u, uv, v)$
2. $\mathbf{X}(u, v) = (u^2, u^3, v)$
3. $\mathbf{X}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

ESERCIZIO 3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di \mathbb{R}^3

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a .