GE2 - Tutorato IV

Chiara Del Vescovo

9 novembre 2005

Domanda preliminare: ci ricordiamo cos'è uno spazio affine?

DEF. :Siano: V e V' due $\mathbb{K}-$spazi vettoriali, A e A' due spazi affini rispettivamente su V e V'; un ISOMORFISMO di A in A' è un'applicazione biunivoca $f : A \to A'$ t.c. esista un isomorfismo degli spazi vettoriali associati $\psi : V \to V'$ che verifica: $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \psi(\overrightarrow{PQ})$, $\forall P, Q \in A$.
Una AFFINITA' di A è un isomorfismo di A su A stesso.

LEMMA :Fissato un punto $O \in A$, $\forall\ O' \in A'$ e $\forall \psi \in GL(V)$, esiste una unica affinità $f : A \to A'$ t.c. $f(O) = O'$ e t.c. l'automorfismo associato ad f sia ψ.
In particolare, un'affinità è univocamente determinata dall'automorfismo di V ad essa associato e dall'immagine $f(O)$ di un qualsiasi punto $O \in A$.

ESEMPI:

- L'identità $\mathbf{1}_A : A \to A$ è una affinità, con automorfismo associato l'identità $\mathbf{1}_V \in GL(V)$.
- Un'importante classe di trasformazioni afini di uno spazio affine A su V è quella costituita dalle traslazioni:
  sia $v \in V$; definiamo la TRASLAZIONE DEFINITA DA v come l'affinità che associa ad ogni $P \in A$ il punto $t_v(P)$ t.c. $\overrightarrow{Pt_v(P)} = v$. Si vede facilmente che l'automorfismo associato ad una qualsiasi traslazione è ancora l'identità $\mathbf{1}_V : V \to V$.
- Dato $O \in A$, consideriamo il gruppo di trasformazioni affini $\mathbf{Aff}(A)_O$ formato da tutte le affinità che lasciano fisso il punto O; per il lemma precedente, ognuna di esse sarà individuata dalla matrice dell'automorfismo associato $\psi \in GL(V)$.
- Dato $c \in \mathbb{K}$, una OMOTETIA di centro O e fattore c è $f \in \mathbf{Aff}(A)_O$ dove l'automorfismo associato è la matrice $c\mathbf{1}_V$.

Detto questo... sappiamo cos'è una ISOMETRIA?

1. Sia $A = A^2_{\mathbb{R}}$ uno spazio affine con riferimento affine $(O, \mathbb{E})$. Date le rette:
$$r: \ y = 1 \ \text{ e } \ s: \ x = 2$$
determinare le equazioni di tutte le affinità $(f, \phi) \in \mathbf{Aff}(A^2_{\mathbb{R}})$ tali che:
$$f(r) = s \ \text{ e } \ f(s) = r.$$
Tra tali affinità esistono traslazioni?

2. Sia $A = A^3_{\mathbb{R}}$ uno spazio affine con riferimento affine $(O, \mathbb{E})$.
Sia $f = (f, \psi)$ l'affinità di A definita rispetto alle seguenti condizioni:
$f(P) = P'$ con $P = (2, 1, -1)$ e $P' = (-2, 0, 0)$;
$f(Q) = Q'$ con $Q = (2, 1, 0)$ e $Q' = (0, 1, 1)$;
$\psi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$;
$\psi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.
   (a) Determinare le equazioni di f;
   (b) Determinare i punti fissi di f.

3. Classificare le isometrie di una retta euclidea.

4. Sia $\mathbf{E}^2$ il piano euclideo con riferimento orientato $(O, \mathbb{E})$.
   (a) Scrivere le equazioni della rotazione $\sigma = \sigma_{P_0}$ di $\mathbf{E}^2$, di centro $P_0 = (-1, 1)$ ed angolo orientato $[\theta] = [\frac{\pi}{6}]$;
   (b) Scrivere le equazioni della riflessione ρ_r, con r retta di $\mathbf{E}^2$ di equazione $x + y - 1 = 0$;
   (c) Individuare la retta s per P_0 tale che $\rho_r \circ \rho_s = \sigma$.

5. Siano r ed s due rette incidenti di $\mathbf{E}^2$. Verificare che $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di $\mathbf{E}^2$, di centro il punto $P_0 = r \cap s$. Fissato poi un riferimento cartesiano, determinare l'angolo (orientato) di tale rotazione, in funzione degli angoli (orientati) di ρ_r e ρ_s.