GE2 - Tutorato III (Prova d'esonero)

Chiara Del Vescovo

3 novembre 2005

1. Sia $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ $\forall\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Scrivere la matrice A associata alla forma bilineare simmetrica b.
   (b) Verificare in almeno due modi diversi che A è definita positiva (e quindi b è un prodotto scalare).
   (c) Si consideri la famiglia di vettori $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & (-1)^n n \end{pmatrix} \}$; Determinare una famiglia $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_n\}$ di vettori normali a due a due $b-$ortogonali t.c.: $\mathit{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} = \mathit{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}\, \forall n \in \mathbb{N}$.
   (d) Che dimensione ha lo spazio $\mathit{span}\{\mathcal{V}\}$?

2. Sia $M \in GL_n(\mathbb{R})$; cosa si può dire della matrice $A = M^tM$?
   E viceversa, come deve essere A affinché esista M t.c. $A = M^tM$?

3. Data la forma quadratica $q(\mathbf{x})$ su $\mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   trovare una base di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per q e determinarne la segnatura.