GE2 - Tutorato II

Chiara Del Vescovo

26 ottobre 2005

DEF.: Data una matrice $A \in \mathcal{M}(\mathrm{n}\times\mathrm{n})$, definiamo, al variare di $i = 1, \ldots, n$, il valore $\alpha_i := |(A(1, \ldots, i|1, \ldots, i))|$, sottomatrice di A. Gli n scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = |A|$ sono detti MINORI PRINCIPALI DI A.

TEOREMA (DI JACOBI-SYLVESTER): Sia b una forma bilineare simmetrica su V spazio vettoriale n-dimensionale. Sia $\mathbb{E}$ una base di V e sia A la matrice di b rispetto ad $\mathbb{E}$. Risulta: A è definita positiva (e quindi b è un prodotto scalare) $\iff$ gli n minori principali di A sono positivi (cioè $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$.

ESERCIZI:

1. Sia b_a la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$, definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare per quali valori di a si ha che b_a in base $\mathbb{E}$ è un prodotto scalare.

   (b) Posto $a = 1$, determinare l'equazione del cono b_1-isotropo, e due vettori isotropi linearmente indipendenti.

   (c) Posto $a = 0$, determinare le equazioni dei seguenti sottospazi:

$$\mathbf{e}_1{}^{\perp}, \quad span(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^{\perp}, \quad (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^{\perp}$$

   (d) Posto $a = 4/3$, ortonormalizzare (rispetto a $b_{4/3}$) la base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Sia b un prodotto scalare su $V = V_{\mathbb{R}}$. Sia U un sottospazio vettoriale di V. Chiamiamo **operatore di proiezione ortogonale su** U l'operatore lineare $P : V \longrightarrow V$ di proiezione su U, parallelamente a $U^{\perp}$. Chiamiamo inoltre **operatore di simmetria ortogonale rispetto a** U l'operatore lineare $S : V \longrightarrow V$ di simmetria rispetto a U, parallelamente a $U^{\perp}$. Poniamo $V = V^3_{\mathbb{R}}$ e indichiamo con $\mathbb{E} = (\ \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}\ )$

una base b-ortonormale di V. Se U è il piano vettoriale di equazione $x - y + 2z = 0$ (in base $\mathbb{E}$), determinare le espressioni di P e di S (in base $\mathbb{E}$).

3. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Considerando A come matrice associata al prodotto scalare b, ridurla in forma diagonale utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

   (b) considerando A come matrice associata all'operatore simmetrico $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, diagonalizzarlo utilizzando il teorema spettrale.

4. Dimostrare il teorema di Jacobi-Sylvester.