NOTA BENE: nateriale vario, a volte non corretto, riguardante non solo il primo esonero di GE2 ma anche i compiti o gli esoneri successivi. Il lettore potra' rintracciare eventuali esercizi utili per la preparazione dle primo esonero 2005 di GE2.

Corso di Studio in Matematica, Prova di esonero di GE2 del 7 novembre 2002

1 *Sia* $\mathbf{E}$ *un piano euclideo di vettori geometrici e sia* $0; \overline{i}, \overline{j}$ *un riferimento cartesiano su* $\mathbf{E}$. *Si considerino i punti: A(1,0), B(0,1), C(1,1). Si determinino tutte le isometrie*

$$f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

che mandano l'insieme di punti $\{A, B, C\}$ *in se stesso.*
A, B, C sono i vertici di un triangolo rettangolo con angolo retto in C. Le isometrie sono quattro: identita', rotazione R di $\frac{3}{2}\pi$, simmetria S di asse la retta $X - Y = 0$, $S \cdot R$.

2 Sullo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si considerino i seguenti due prodotti scalari:

(1) $< \overline{x}, \overline{y} >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (prodotto scalare standard)

(2) $< \overline{x}, \overline{y} >^*= x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$.

Si applichi il metodo di Gram-Schmid alla base canonica e per costruire una base ortonormale f del secondo prodotto scalare $<, >^*$.
Si provi che la matrice M del cambiamento di base da f ad e non e' ortogonale.

3 *Sia* $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'operatore lineare cosi' definito:* $F(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$. *Si verifichi che* F *e' simmetrico rispetto al prodotto scalare standard* $<, >$ *e si costruisca una base ortonormale diagonalizzante di* F.
Sia $<, >^*$ *il prodotto scalare su* $\mathbf{R}^3$ *definito nell'esercizio 2. Si dica, motivando la risposta, se* F *e' un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare* $<, >^*$.
La base canonica e e' una base ortonormale per il prodotto scalare standard. La matrice di F rispetto alla base canonica e' $A =$

poiche' tale matrice e' simmetrica F e' un operatore simmetrico. Il polinomio caratteristico di F e'

$$det(A - TI) = (1 - T)(T^2 - 1).$$

L'autovalore 1 ha come autospazio V_1 l'insieme delle terne

$$(u, v, u)$$

(al variare di u e v in $\mathbf{R}$). $dim V_1 = 2$. Una base ortonormale di V_1 e' costituita dai vettori $\overline{a}_1 = (0, 1, 0)$ e $\overline{a}_2 = (2^{-\frac{1}{2}}, 0, 2^{-\frac{1}{2}})$.
L'autovalore -1 ha come autospazio V_{-1} l'insieme delle terne

$$(u, 0, -u)$$

(al variare di u in $\mathbf{R}$). $dim V_{-1} = 1$. Una base ortonormale di V_1 e' costituita dal vettore $\overline{a}_3 = (2^{-\frac{1}{2}}, 0, -2^{-\frac{1}{2}})$.
I tre vettori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ costituiscono una base a che e' ortonormale per $<,>$ e diagonalizzante per F.
Sia $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Si calcola esplicitamente che

$$< \overline{x}, F(\overline{x}) >^* = x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3x_1 + x_2x_1 + x_3x_2 = 3x_1x_3 + x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3.$$

D'altra parte

$$< F(\overline{x}), \overline{x} >^* = x_3x_1 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2 = 3x_1x_3 + x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3.$$

Quindi

$$< \overline{x}, F(\overline{x}) >^* = < F(\overline{x}), \overline{x} >^*$$

e F e' simmetrico anche rispetto a $<,>^*$.

Facoltativo.
Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un operatore simmetrico rispetto a un prodotto scalare definito su $\mathbf{R}^2$. Si dica, motivando la risposta, se F puo' non essere simmetrico rispetto ad un secondo prodotto scalare definito su $\mathbf{R}^2$.
Si' se F ha due autovalori distinti. Siano λ_1 e λ_2 tali autovalori e siano $\overline{a}_1$ e $\overline{a}_2$ autovettori corrispondenti. Se F e' simmetrico rispetto a un prodotto scalare $<,>$ ne segue che

$$< \overline{a}_1, \overline{a}_2 > = 0.$$

Sia $<,>^*$ un secondo prodotto scalare definito su $\mathbf{R}^2$ e tale che

$$< \overline{a}_1, \overline{a}_2 >^* \neq 0.$$

Allora F non puo' essere simmetrico rispetto a $<,>^*$.
L'esistenza di prodotti scalari $<,>^*$ come sopra si prova facilmente. Ad esempio sara' sufficiente considerare il prodotto scalare che, rispetto alla base $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ ha come matrice associata

(1) Sia $F : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica cosi' definita sulle coppie di vettori della base canonica $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:

$$F(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 1 - \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} e' l'indice di Kronecker.
(i) Si scriva la matrice di F rispetto alla base canonica.
(ii) Si determini una base diagonalizzante per F che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.
(iii) Al variare di c in $\mathbf{R}$ si consideri la forma bilineare $F_c : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cosi' definita sulle coppie di vettori della base canonica:

$$F(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 1 - c\delta_{ij}.$$

Si determini l'insieme dei valori di c per i quali F_c e' un prodotto scalare.
SOLUZIONE (i) la matrice A di F ha sempre zero sulla diagonale principale e sempre uno altrove.
(ii) Per $T = -1$ la matrice $A - TI$ ha rango 1. -1 e' un autovalore di molteplicita' geometrica 2, uguale a quella algebrica perche' la matrice A e' simmetrica, quindi diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico ha dunque -1 come radice doppia:

$$det(A - TI) = -(T + 1)^2(T - 2).$$

Si devono calcolare gli autospazi degli autovalori -1 e 2. L'autospazio di autovalore 2 e' generato dall'autovettore $\overline{a}_1 = (1, 1, 1)$. L'autospazio di autovalore -1 ha dimensione due. Bisogna determinare una base ortogonale per tale autospazio, ad esempio:

$$\overline{a}_2 = (1, -1, 0)\ ,\ \overline{a}_3 = (1, 1, -2).$$

Dividendo i tre autovettori per le loro lunghezze si ottiene una base ortonormale diagonalizzante.
(iii) La matrice di F_c rispetto alla base canonica ha sempre $-c$ sulla diagonale principale e altrove sempre uno. Il suo determinante, (si veda il calcolo del polinomio caratteristico), e' quindi

$$-(c + 1)^2(c - 2)$$

ed e' > 0 per $c < 2$. Applicando il teorema dei determinanti principali abbiamo le altre condizioni: $-c > 0$, $c^2 - 1 > 0$. Le tre condizioni sono soddisfatte se e solo se $c < -1$.

(2) Sia $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V. Per $i = 1, 2$ si consideri la riflessione

$$r_i : V \to V$$

determinata dal vettore $\overline{n}_i = \overline{e}_i + \overline{e}_3$.
(i) Si scriva la matrice dell'operatore $f = r_1 \cdot r_2$ rispetto alla base $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ e si dica, motivando la risposta, se f e' una riflessione.

(ii) Sia $H \subset V$ il sottospazio vettoriale euclideo generato dai vettori $\overline{n}_1$ e $\overline{n}_2$. Si provi che $f(H) = H$.
(iii) Si determini l'angolo convesso dei vettori $\overline{n}_1$ e $\overline{n}_2$. Si scriva la matrice di f/H rispetto ad una delle due basi ortonormali di H formate dai vettori $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$, dove

$$\overline{u}_1 = \frac{\overline{n}_1}{2^{\frac{1}{2}}}$$

e $\overline{u}_2$ e' uno dei due versori di H ortogonali a $\overline{u}_1$.
(iv) Si dimostri che ogni operatore unitario di uno spazio vettoriale euclideo 2-dimensionale o e' una riflessione oppure e' la composizione di due riflessioni.
SOLUZIONE (iv) Sia B la matrice 2 x 2 con 1 e -1 sulla diagonale principale e zero altrove. Rispetto ad un riferimento cartesiano B e' la matrice della riflessione di asse la retta $Y = 0$. In particolare si ha $B^2 = I$. Sia A la matrice di una isometria qualsiasi, abbiamo allora

$$A = (AB)B.$$

Se $det\ A = 1$ abbiamo $det(AB) = -1$ e $det\ B = -1$. Quindi la isometria in questione e' prodotto delle riflessioni di matrici AB e B. Se $det\ A = -1$ non c'e' nulla da dimostrare.

(3) In $\mathbf{R}^4$ si consideri il sottospazio V_1 generato dai vettori $\overline{a} = (1, 1, -1, 1)$ e $\overline{b} = (1, 0, 0, -1)$ ed il sottospazio V_2 generato dai vettori $\overline{c} = (2, 1, 1, 2)$ e $\overline{d} = (3, 1, 1, 1)$. Utilizzando il prodotto scalare standard ed il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmid si costruiscano sottospazi W_1 e W_2 di $\mathbf{R}^4$ tali che:
(1) $V_1 = W_1$ e $V_1 + V_2 = W_1 + W_2$
(2) $W_1 \subseteq W_2^{\perp}$.
SOLUZIONE Il modo piu' semplice di rispondere e': essendo $V_1 = W_1$ basta porre

$$W^2 = (V_1 + V_2) \cap W_2^{\perp}.$$

Gli spazi W_1 e W_2 sono allora uno l'ortogonale dell'altro in $V_1 + V_2$. Quindi la loro somma e' somma diretta ed e' uguale a $V_1 + V_2$.
Alternativamente: applicare Gram-Schmid ai 4 vettori. Se ne ricavano tre non nulli, di cui i primi due generano $V_1 = W_1$. Il terzo genera W_2. Quest'ultimo spazio ha infatti, nell'esercizio, dimensione uno.

Prove scritta di GE2 del 18 luglio 2005

(1) In un piano euclideo con sistema di riferimento cartesiano $O, \overline{i}, \overline{j}$ si determini l'equazione della conica passante per i punti $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,-1)$, $(2,0)$.
Si studi la conica C verificando se e' degenere o non degenere e determinandone il tipo.
Si determinino infine le equazioni degli assi di simmetria di C.

(2) Sia $\overline{i}, \overline{j}$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione due e siano $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j}$, $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j}$. Si determini, scrivendone la matrice rispetto alla base suddetta, un operatore unitario $\phi : V \to V$ diverso dalla identita' e tale che $\phi(\overline{i})$ e' parallelo a $\overline{u}$.
Sia poi E un piano affine su V con sistema di riferimento cartesiano $O, \overline{i}, \overline{j}$. Si scrivano le equazioni della isometria f determinata da ϕ e che manda l'origine nel punto $(1,-1)$.
Sia infine C la conica di equazione $2x^2 - y^2 + 4xy - 4x - 4y = 0$, si scrivano le equazioni delle coniche C_1 e C_2 tali che $f(C_1) = C$ e $f(C) = C_2$.

(3) Sia $a : R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare cosi' definita rispetto alla base canonica $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:

$$a(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3, \quad a(\overline{e}_2) = 2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_3, \quad a(\overline{e}_3) = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 - \overline{e}_3.$$

Verificare che a e' un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare standard di R^3.
Determinare una base ortonormale diagonalizzante di a.
Determinare l'insieme I dei vettori $\overline{v} \in \mathbf{R}^3$ tali che $\overline{v}$ e $a(\overline{v})$ hanno la stessa lunghezza.
Rispondere infine motivatamente alla seguente domanda: e' vero che I e' un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$?

Corso di Studio in Matematica, Prova scritta di GE2 del 5 febbraio 2002

1 Si consideri la forma bilineare simmetrica $b : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ cosi' definita

$$b(\overline{x}, \overline{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 - 2x_4y_4.$$

Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio ortogonale al vettore $(0,0,0,1)$. Si determini una base diagonalizzante per la forma bilineare simmetrica

$$b_V : V \times V \to \mathbf{R}$$

indotta da b. Si dica, motivando la risposta, se b_V e' un prodotto scalare e se esistono vettori isotropi per b.

2 In un piano euclideo $\mathbf{E}$ dotato di riferimento cartesiano $O, \overline{i}, \overline{j}$ si consideri la conica Γ di equazione

$$x^2 + y^2 + xy + x + y = 1.$$

si determinino il centro C della conica e le equazioni degli assi. Si determini una rotazione $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ di centro C che manda un asse in una retta parallela alla retta di equazione $y = 0$. Si dica, motivando la risposta, se esiste una isometria $g : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ che manda un asse di Γ nell'altro e trasforma Γ in se stessa.

3 Nel piano proiettivo reale si consideri la famiglia di coniche di equazione

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_0 + 2x_2x_0 + x_0^2) + \mu x_1x_2 = 0.$$

Si determinino le coniche degeneri della famiglia. Si determinino i punti comuni a tutte le coniche della famiglia. Si determinino le proiettivita' $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ che fissano tali punti ed inoltre il punto $(1 : 0 : 0)$. Si dica, motivando la risposta se le coniche non degeneri della famiglia sono tutte proiettivamente equivalenti. Stessa domanda per le coniche degeneri.

4 Sia M la matrice a blocchi

$A \quad O$

$O \quad D$

dove A e' la matrice 2 x 2 con tutti i termini uguali a 1, $D = A - I$ e O e' la matrice nulla. Si determini una matrice ortogonale P tale che

$${}^tPMP$$

e' una matrice diagonale.

ESERCIZI ED ESEMPI (GE2 30/9/2004).

(1) Costruire una base diagonalizzante per la forma bilineare simmetrica

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = (x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n).$$

($k = \mathbf{R}$).
Esistono sottospazi $S \subset \mathbf{R}^n$ i cui elememnti sono tutti vettori isotropi rispetto a F? Se esistono quale e' la loro dimensione massima possibile?

(2) Costruire, indicandone la matrice rispetto alla base canonica, tutte le forme bilineari simmetriche

$$F : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

che hanno come sottospazio di vettori isotropi quelo definito dalle seguenti equazioni:

$$x_1 - x_2 = x_3 = 0.$$

$(F(overlinex, \overline{x}) = ax_1^1 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 + x_3(...)$. Vogliamo:

$$at^2 + 2bt^2 + dt^2 = 0$$

Quindi

$$a + 2b + d = 0$$

e' il sottospazio richiesto nello spazio di tutte le matrici simmetriche.

(3) Diagonalizzare con Gauss-Jordan simmetrico varie matrici simmetriche. Scrivere la base diagonalizzante rispetto alla base dipartenza, avendo costruito la matrice P.

(4) Quali affermazioni sono vere e quali false per $V = \mathbf{R}^7$:
-Se F ha un vettore isotropo non nullo allora e' una forma indefinita.
-Se F ha rango massimo allora non ha vettori isotropi diversi dal vettore nullo.
-Se F ha un vettore isotropo non nullo ed ha rango massimo allora e' una forma indefinita.

(5) Verificare che la matrice associata ad una forma quadratica reale e' la Hessiana della forma stessa.

(6) Siano A e B due forme bilineari simmetriche arbitrarie. Esiste una base diagonalizzante per entrambe?

Corso di Studio in Matematica

Compito di GE2 del 19 settembre 2002.

(1) In un piano euclideo, dotato di un sistema di riferimento cartesiano $0\overline{ij}$ si consideri il seguente fascio di coniche

$$\lambda(X^2 - Y^2) + \mu(X^2 + Y^2 + 2XY - 2Y - 1) = 0.$$

Si determinino le coniche degeneri del fascio e si dica di quale tipo sono. Si determinino le parabole non degeneri e se ne scriva l'equazione in forma canonica.

(2) Si determinino le forme bilineari simmetriche

$$b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

definite dalle seguenti condizioni (i) e (ii):
(i) $b(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = b(\overline{e}_2, \overline{e}_3) = b(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = 1$.
(ii) i vettori $\overline{e}_1 - \overline{e}_2$, $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, sono ortogonali.
(iii) 1 e' un autovalore della matrice associata.
Per una di queste forme b si determini una base diagonalizzante di b che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo standard.

(3) In un piano affine reale A dotato di un riferimento affine $0\overline{e}_1\overline{e}_2$ si consideri la conica C di equazione

$$x^2 + xy - 2x + 1 = 0$$

e si determini il suo centro. Si scriva l'equazione della conica $f(C)$, dove $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ e' il cambiamento di coordinate affini definito dalle seguenti condizioni:
(i) f fissa l'origine,
(ii)f fissa il centro della conica C,
(iii) f manda la retta di equazione $x - y = 0$ nella retta $x - y = 0$.

(4) nel piano proiettivo reale dotato di coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$ si scriva l'equazione della conica C soddisfacente alle seguenti condizioni:
(i) C contiene in punti di coordinate $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$.
(ii) C interseca la retta di equazione $x_1 = 0$ in uno ed un solo punto di coordinate $(0 : 1 : 1)$.
Si ponga $x_0 = 1$ e si consideri, nel piano affine di coordinate x_1, x_2, l'equazione cosi' ottenuta. Si dica, motivando la risposta, il tipo di conica affine definito da tale equazione.