Momento di una forza

Nella figura 1 è illustrato come forze uguali e contrarie possono non produrre equilibrio, bensì una tendenza a ruotare quando vengono applicate in punti diversi di un corpo esteso.

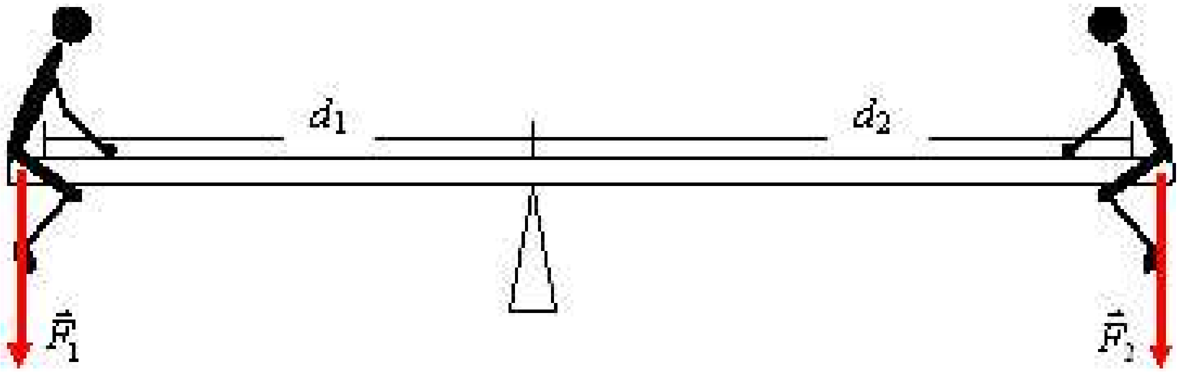

Figura 1:

Si consideri l'altalena a bilico della figura. La tendenza a ruotare, ad esempio, in senso antiorario, cresce non solo col il peso della persona a sinistra, ma anche con la sua distanza dal fulcro. Per spiegare questo fatto, definiamo il *momento di una forza* come

$$\tau = dF \tag{1}$$

cioé come il prodotto della distanza tra la retta di applicazione della forza e l'asse di rotazione (braccio della forza) per la forza stessa. Il momento di una forza è la tendenza di una forza a provocare rotazione. Il momento di una forza è identico, ovunque venga applicata la forza lungo la retta di applicazione, come mostrato in figura 2.

Il momento di una forza può essere espresso in funzione della distanza r tra il punto di applicazione della forza e l'asse di rotazione come

$$\tau = Fr\sin\theta \tag{2}$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

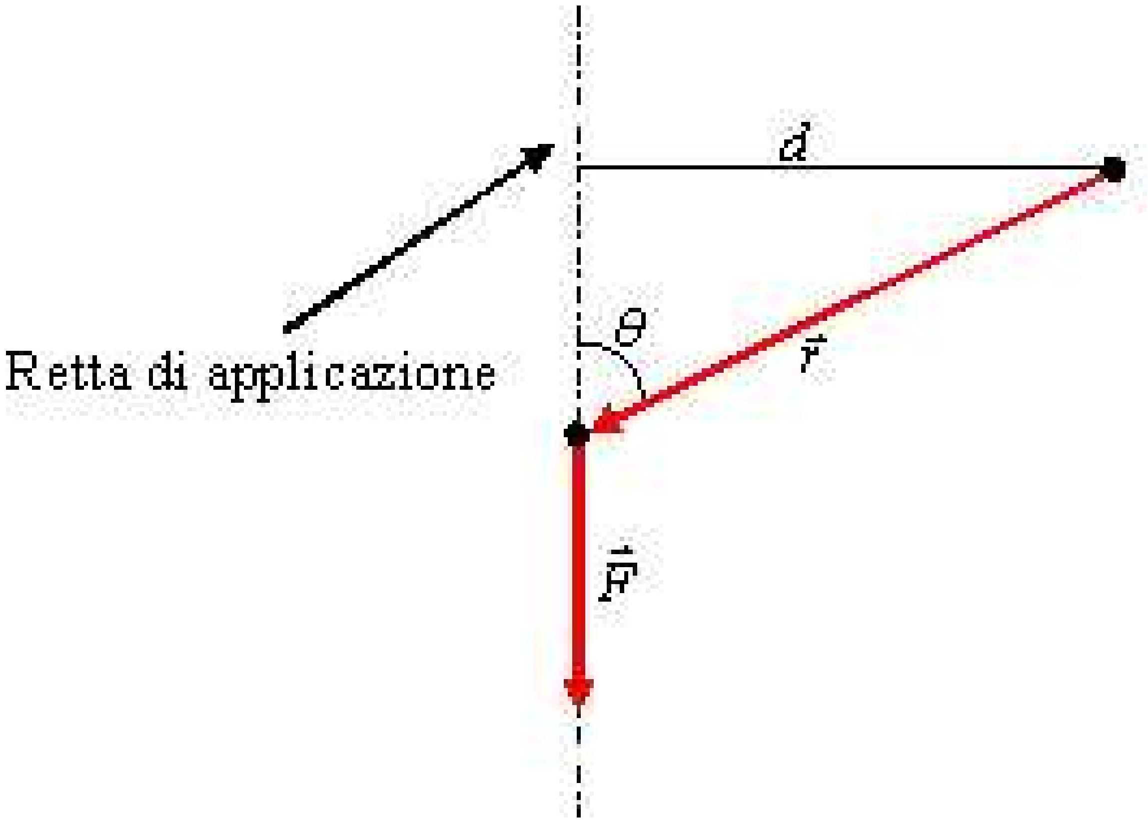

Figura 2:

Si osservi che im momento di una forza dipende dall'asse di rotazione: la stessa forza può esercitare differenti momenti rispetto a differenti assi di rotazione.

Osservando l'equazione 2 da un punto di vista matematico, riconosciamo che il secondo membro è il modulo del prodotto vettoriale $\vec{r} \times \vec{F}$. Ciò suggerisce di introdurre una definizione più generale di momento di una forza come

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3}$$

In questa definizione, il momento di una forza è una grandezza vettoriale e può essere rappresentato mediante un vettore.

Il modulo di questo vettore è il modulo del momento di una forza definito poc'anzi. Quindi, dobbiamo spiegare se ha senso fisico definire un vettore di tale direzione e verso. La direzione del vettore $\vec{\tau}$ è normale al piano di $\vec{r}$ e $\vec{F}$, ossia coincide con la direzione dell'asse di rotazione. Quindi, la direzione ha un significato fisico reale attinente alla rotazione che il momento stesso provoca. Inoltre, la direzione dell'asse di rotazione può essere qualsiasi, ed ha quindi senso rappresentarla con un vettore che può assumere qualsiasi direzione nello spazio. Per quanto riguarda il verso, possiamo notare che in una rotazione antioraria, come quella rappresentata in figura 3, il momento di una forza ha verso positivo verso l'alto (secondo la regola della mano destra del prodotto vettoriale), ovvero ha lo stesso verso del vettore veloctià angolare della rotazione.

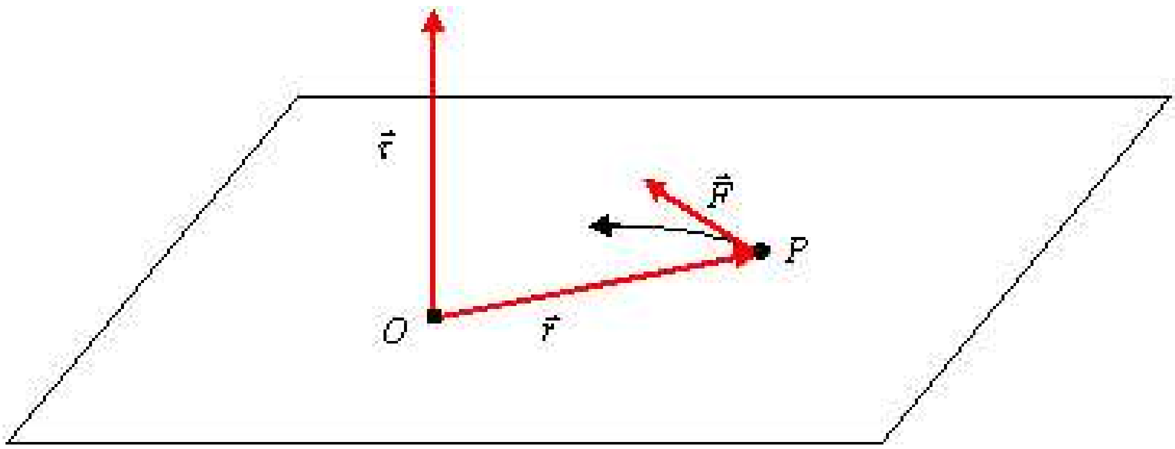

Figura 3:

Quindi, il risultato del prodotto vettoriale defïnto dalla 3 definisce bene il momento di una forza in quanto il suo modulo rappresenta il modulo del momento, la sua direzione è direzione nello spazio dell'asse di rotazione e il suo verso coincide con il verso della veloctà angolare del moto rotazionale generato dall'applicazione della forza che genera quel momento.

Il momento di una forza e il momento della quantità di moto

Ora che abbiamo definito concettualmente il momento di una forza, vediamo cos'altro possiamo ricavare dalla sua definizione.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

Ricordiamo che la forza $\vec{F}$ può essere definita come (seconda legge di Newton)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{5}$$

Sostituendo quest'ultima nella 4

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{6}$$

Poiché

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{Q}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{Q} + \vec{r} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{7}$$

per la regola di derivazione del prodotto applicata ai vettori, si ha

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{Q}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{Q} \tag{8}$$

Il secondo termine a secondo membro è nullo poiché la derivata di $\vec{r}$ è $\vec{v}$ (vettore velocità), che a sua volta è parallelo a $\vec{Q}$. Quindi

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{Q}) \tag{9}$$

ovvero

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{Q}) \tag{10}$$

Definendo la quantità tra parentesi a secondo membro come *momento della quantità di moto* o *momento angolare*

$$\vec{P} = \vec{r} \times \vec{Q} \tag{11}$$

si ha

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{12}$$

Si noti che questa espressione è l'analogo rotazionale della seconda legge di Newton per i moti lineari

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{13}$$

Leggi fondamentali

Dato un sistema di n punti materiali, per ciascun punto i possiamo scrivere l'equazione che formalizza la seconda legge di Newton

$$\vec{f}_i = \frac{d\vec{q}_i}{dt} \tag{14}$$

e l'equazione del momento angolare

$$\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{15}$$

Ma le forze che agiscono su un punto i e i momenti delle forze, saranno in generale esercitate da agenti esterni (forze esterne $f^{(e)}$) ed agenti interni (forze interne $f^{(i)}$) e quindi le ultime due equazioni possono essere riscritte come

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{q}_i}{dt} \tag{16}$$

e

$$\vec{\tau}_i^{(e)} + \vec{\tau}_i^{(i)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \tag{17}$$

Sommando su tutti i punti n che compongono il sistema si ha

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{18}$$

e

$$\vec{\tau}^{(e)} + \vec{\tau}^{(i)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{19}$$

dove $\vec{F}^{(e)}$ è la risultante di tutte le forze esterne che agiscono sul sistema, $\vec{F}^{(i)}$ è la risultante di tutte le forze interne che agiscono sul sistema, $\vec{\tau}^{(e)}$ è la risultante di tutti i momenti delle forze esterne che agiscono sul sistema e $\vec{\tau}^{(i)}$ è la risultante di tutti i momenti delle forze interne che agiscono sul sistema.

Per il principio di azione e reazione la risultante delle forze interne un sistema è nulla. Inoltre, è nulla anche la risulatante dei momenti delle forze interne, poiché queste forze agiscono lungo la congiungente i due punti e perciò hanno momento nullo. Quindi le equazioni 20 e 21 possono essere riscritte come

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \tag{20}$$

e

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{21}$$

e vengono dette *equazioni cardinali della dinamica dei sistemi.*

Conservazione del momento angolare

Come nel caso della quantità di moto, si presentano numerose circostanze in cui il momento della quantità di moto si conserva.

Se la risultante dei momenti delle forze esterne applicate su un sitema è nulla o si elide si ha:

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \tag{22}$$

che implica

$$\vec{P} = cost \tag{23}$$

Momento di inerzia

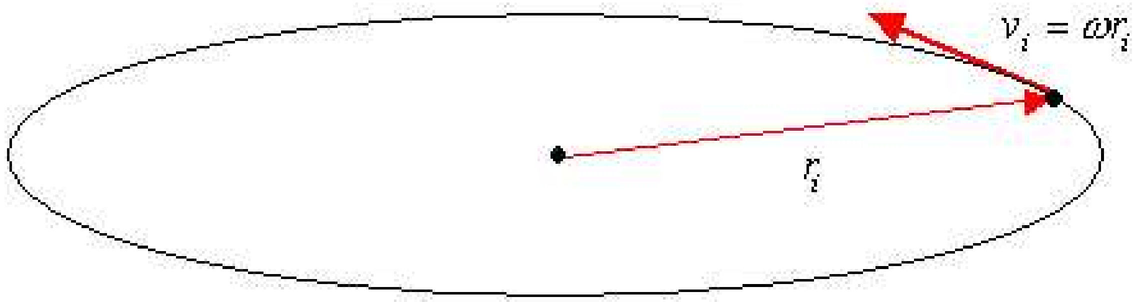

Figura 4:

Consideriamo un corpo rigido rotante attorno ad un asse fisso, che assumiamo come asse z, con velocità angolare ω (figura 4). Un punto materiale m_i, situato ad una distanza r_i dall'asse z e rotante con velocità v_i attorno ad esso, ha un momento angolare, rispetto ad un punto dell'asse,

$$p_i = m_i r_i v_i \tag{24}$$

(abbiamo potuto eliminare il prodotto vettoriale perché in questo caso r_i e v_i sono perpendicolari). Poiché $v_i = \omega r_i$ possiamo scrivere

$$p_i = m_i r_i^2 \omega \tag{25}$$

Sommando su tutti i punti materiali che costituiscono il corpo, troviamo il momento angolare del corpo rispetto all'asse di rotazione

$$P = \sum m_i r_i^2 \omega \tag{26}$$

Il coefficiente $\sum m_i r_i^2$ che moltiplica la velocità angolare ω (uguale per tutti i punti) viene denotato con il simbolo I:

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{27}$$

e quindi

$$P = I\omega \tag{28}$$

che è l'analogo rotazionale della relazione $q = mv$.

Applicando la legge $\tau = \frac{dP}{dt}$ alla rotazione attorno all'asse z, otteniamo

$$M = \frac{dI\omega}{dt} = I\alpha \tag{29}$$

dove $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ è l'accelerazione angolare attorno all'asse z.

Teorema di Huygens-Steiner

Il momento di inerzia I_P di un corpo rispetto ad un asse passante per un punto

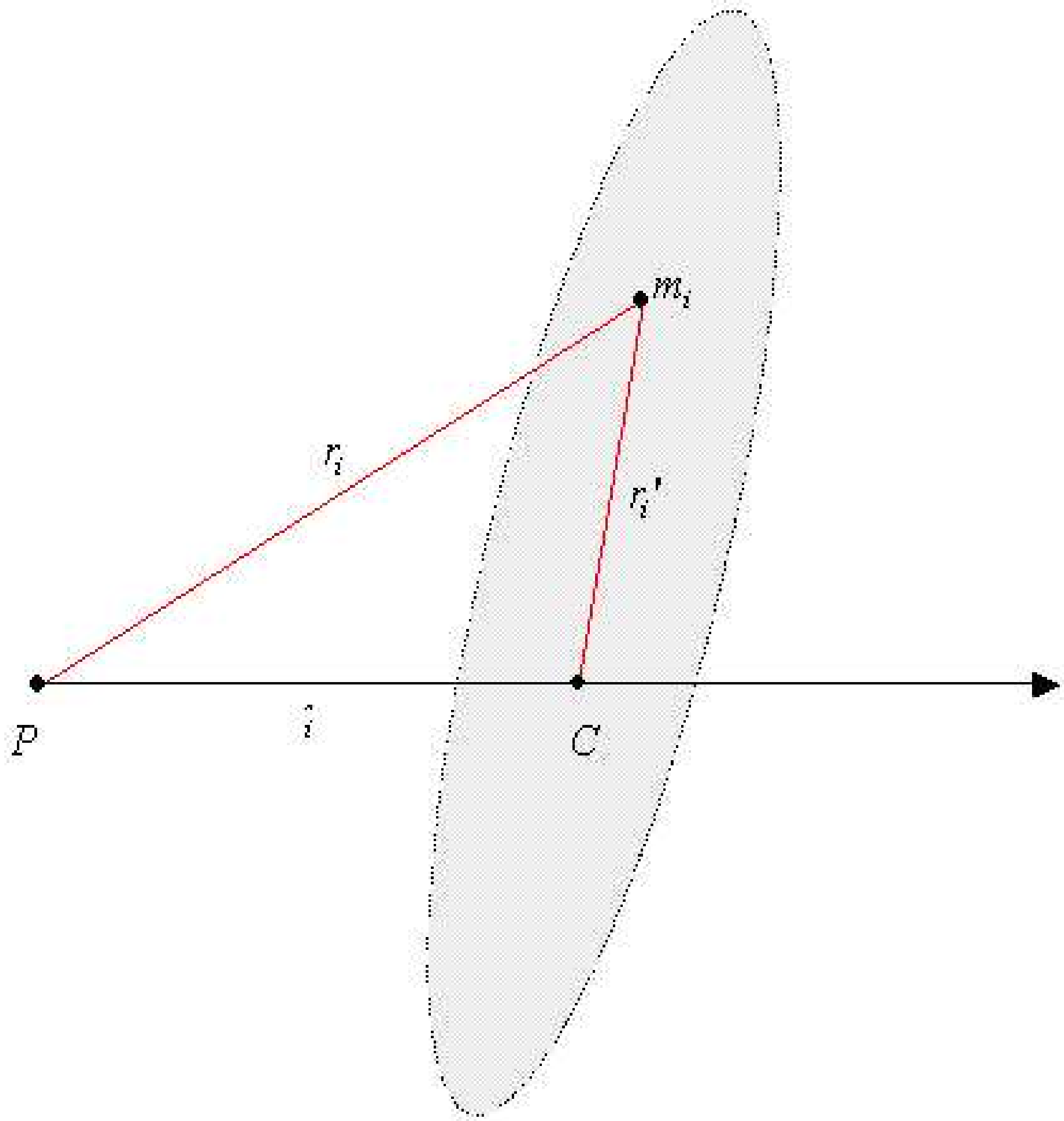

Figura 5:

qualunque P è dato dalla somma del momento di inerzia I_C del corpo rispetto all'asse passante per il centro di massa e il prodotto della massa m del corpo per il quadrato della distanza r^2 tra i due assi di rotazione (i due assi devono essere paralleli, in figura 5 perpendicolari al piano del foglio):

$$I_P = I_C + mr^2 \tag{30}$$